

## Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik II Aufgabe A1

### Aufgabe A1.

Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = \frac{1}{2}x - 1$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Die Punkte  $P(0 | -1)$  und  $Q(5,5 | 1,75)$  sind die Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit einer nach unten geöffneten Normalparabel  $p$ .

#### Aufgabe A1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel  $p$  sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes  $S$ .

Zeichnen Sie sodann die Parabel  $p$  und die Gerade  $g$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-6 \leq x \leq 7$ ;  $-3 \leq y \leq 11$

[Teilergebnis:  $p: y = -x^2 + 6x - 1$ ]

#### Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Punkte  $A_n \left(x \mid \frac{1}{2}x - 1\right)$  auf der Geraden  $g$  und Punkte  $B_n (x \mid -x^2 + 6x - 1)$  auf der Parabel  $p$  mit  $0 < x < 5,5$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) haben jeweils dieselbe Abszisse  $x$  und sind zusammen mit Punkten  $C_n$  die Eckpunkte von Dreiecken  $A_n B_n C_n$ . Die Winkel  $C_n B_n A_n$  besitzen stets das Maß  $\beta = 120^\circ$  und für die Seiten  $[B_n C_n]$  gilt:  $\overline{B_n C_n} = 6$  LE.

Zeichnen Sie die Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  für  $x = 0,5$  und  $A_2 B_2 C_2$  für  $x = 4$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

#### Aufgabe A1.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren  $\overrightarrow{B_n C_n}$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt:  $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes  $C_3$  des Dreiecks  $A_3 B_3 C_3$  für  $x = 1,5$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

#### Aufgabe A1.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $A_n B_n C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken  $A_n B_n C_n$  ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.

[Teilergebnis:  $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$  FE]

### Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken  $A_n B_n C_n$  gibt es die Dreiecke  $A_4 B_4 C_4$  und  $A_5 B_5 C_5$ , in denen die Winkel  $A_4 C_4 B_4$  und  $A_5 C_5 B_5$  jeweils das Maß  $\gamma = 25^\circ$  haben.

Berechnen Sie die Länge der Seiten  $[A_4 B_4]$  bzw.  $[A_5 B_5]$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

## Lösung

## Aufgabe A1.

Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = \frac{1}{2}x - 1$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Die Punkte  $P(0|-1)$  und  $Q(5,5|1,75)$  sind die Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit einer nach unten geöffneten Normalparabel  $p$ .

## Aufgabe A1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel  $p$  sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes  $S$ .

Zeichnen Sie sodann die Parabel  $p$  und die Gerade  $g$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-6 \leq x \leq 7$ ;  $-3 \leq y \leq 11$

[Teilergebnis:  $p: y = -x^2 + 6x - 1$ ]

Lösung zu Aufgabe A1.1**Funktionsgleichung ermitteln**

Gegeben:

$$\text{Gerade } g: y = \frac{1}{2}x - 1$$

$P(0|-1)$  und  $Q(5,5|1,75)$  sind die Schnittpunkte der Geraden  $g$  mit einer nach unten geöffneten Normalparabel  $p$ .

Vorüberlegung: Welche Form hat eine nach unten geöffnete Normalparabel?

Erläuterung: *Parabelgleichung bestimmen*

Eine nach unten geöffnete Parabel hat die Form  $y = -ax^2 + bx + c$ .

Bei einer Normalparabel ist zusätzlich  $a = 1$ .

$$\Rightarrow y = -x^2 + bx + c$$

$$y = -x^2 + bx + c$$

Die Punkte  $P$  und  $Q$  werden in die Parabelgleichung eingesetzt und man erhält ein Gleichungssystem:

$$(I) -1 = 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = -1$$

$$(II) 1,75 = -5,5^2 + b \cdot 5,5 + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Einsetzverfahren*

$c = -1$  wird in Gleichung (II) eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach  $b$  aufgelöst.

$$(II) 1,75 = -5,5^2 + b \cdot 5,5 - 1 \quad | \quad +5,5^2 + 1$$

$$(II) 33 = 5,5b \quad | \quad : 5,5$$

$$\Rightarrow b = 6$$

$$\Rightarrow p: y = -x^2 + 6x - 1$$

Bestimmung des Scheitelpunktes:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$  besitzt folgenden Scheitelpunkt  $S$ :

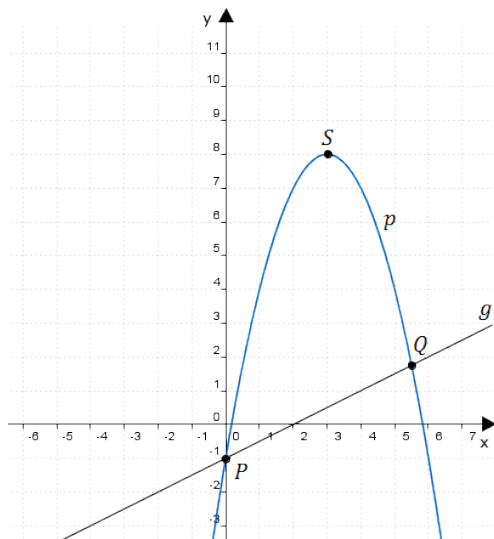
$$S \left( -\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$S \left( -\frac{6}{2 \cdot (-1)} \mid -1 - \frac{6^2}{4 \cdot (-1)} \right)$$

$$\Rightarrow S(3|8)$$

**Skizze**

Parabel  $g$  (Wertetabelle oder Schablone hilfreich) und Gerade  $g$  einzeichnen:

**Aufgabe A1.2** (2 Punkte)

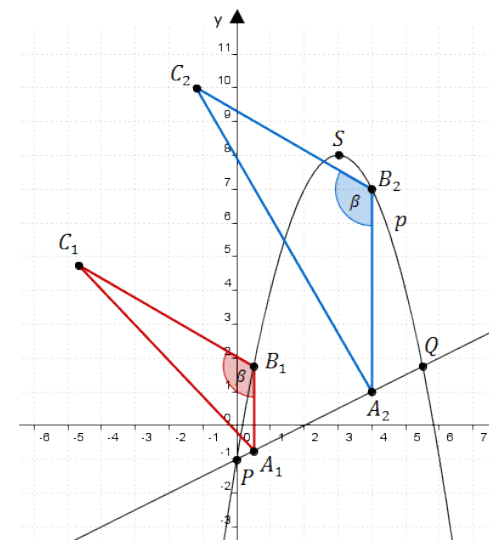
Punkte  $A_n \left(x \mid \frac{1}{2}x - 1\right)$  auf der Geraden  $g$  und Punkte  $B_n (x \mid -x^2 + 6x - 1)$  auf der Parabel  $p$  mit  $0 < x < 5,5$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) haben jeweils dieselbe Abszisse  $x$  und sind zusammen mit Punkten  $C_n$  die Eckpunkte von Dreiecken  $A_n B_n C_n$ . Die Winkel  $\angle C_n B_n A_n$  besitzen stets das Maß  $\beta = 120^\circ$  und für die Seiten  $[B_n C_n]$  gilt:  $\overline{B_n C_n} = 6$  LE. Zeichnen Sie die Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  für  $x = 0,5$  und  $A_2 B_2 C_2$  für  $x = 4$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

**Lösung zu Aufgabe A1.2****Skizze**

Dreiecke  $A_1 B_1 C_1$  und  $A_2 B_2 C_2$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Punkte  $A_1$  auf  $g$  und  $B_1$  auf  $p$  mit dem  $x$ -Wert  $0,5$  einzeichnen.
  - 2) Punkte  $A_1$  und  $B_1$  verbinden
  - 3) Den Schenkel  $[B_1 C_1]$  im Winkel von  $\angle C_1 B_1 A_1 = 120^\circ$  nach links oben mit der Länge  $6$  cm einzeichnen
  - 4) Punkte zum Dreieck verbinden
- Dreieck  $A_2 B_2 C_2$  analog.

**Aufgabe A1.3** (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren  $\overrightarrow{B_n C_n}$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt:  $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes  $C_3$  des Dreiecks  $A_3 B_3 C_3$  für  $x = 1,5$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

### Lösung zu Aufgabe A1.3

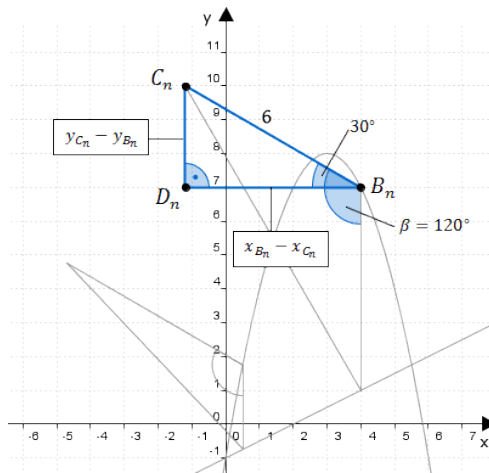
#### Vektor bestimmen

Gegeben:  $\overline{B_n C_n} = 6 \text{ LE}$

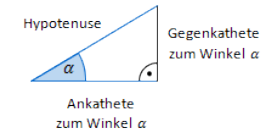
Zu zeigen:  $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es gilt allgemein:  $\overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} x_{C_n} - x_{B_n} \\ y_{C_n} - y_{B_n} \end{pmatrix}$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck  $B_n C_n D_n$  in der folgenden Hilfsskizze:



Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

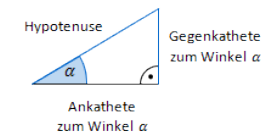
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos 30^\circ = \frac{x_{B_n} - x_{C_n}}{6} \quad | \cdot 6$$

$$x_{B_n} - x_{C_n} = 6 \cos 30^\circ \quad | \cdot (-1)$$

$$x_{C_n} - x_{B_n} = -6 \cos 30^\circ = -5,20$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin 30^\circ = \frac{y_{C_n} - y_{B_n}}{6} \quad | \cdot 6$$

$$y_{C_n} - y_{B_n} = 6 \sin 30^\circ = 3$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} x_{C_n} - x_{B_n} \\ y_{C_n} - y_{B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5, 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe A1.4** (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $A_n B_n C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken  $A_n B_n C_n$  ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.

[Teilergebnis:  $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$  FE]

**Lösung zu Aufgabe A1.4****Flächeninhalt eines Dreiecks**

Gegeben:

$$\beta = 120^\circ, \quad \overline{B_n C_n} = 6 \text{ LE}$$

$$A_n \left( x \mid \frac{1}{2}x - 1 \right), \quad B_n (x \mid -x^2 + 6x - 1)$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{B_n C_n} \cdot \sin \beta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ$$

$$A = 2,60 \cdot \overline{A_n B_n}$$

Nun muss noch  $\overline{A_n B_n}$  berechnet werden.

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte  $A_n$  und  $B_n$  die gleiche Abszisse ( $x$ -Wert) haben und die Punkte  $B_n$  oberhalb den Punkten  $A_n$  liegen, gilt:

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 6x - 1 - \left( \frac{1}{2}x - 1 \right)$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 6x - 1 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 5,5x$$

$$\Rightarrow A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x) \text{ FE}$$

Überprüfen, ob es unter den Dreiecken  $A_n B_n C_n$  ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt:

Erläuterung: *Einsetzen*

$A = 22$  wird in die Gleichung  $A = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$  eingesetzt.

Anschließend wird überprüft, ob sich die Gleichung nach  $x$  auflösen lässt.

$$2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x) = 22$$

$$-2,60x^2 + 2,60 \cdot 5,5x = 22 \quad | \quad -22$$

$$-2,60x^2 + 2,60 \cdot 5,5x - 22 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Es reicht, nur die Diskriminante  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$  zu überprüfen.

Falls die Diskriminante negativ ist, existiert keine Lösung.

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = (2,60 \cdot 5,5)^2 - 4 \cdot (-2,60) \cdot (-22) = -24,31 < 0$$

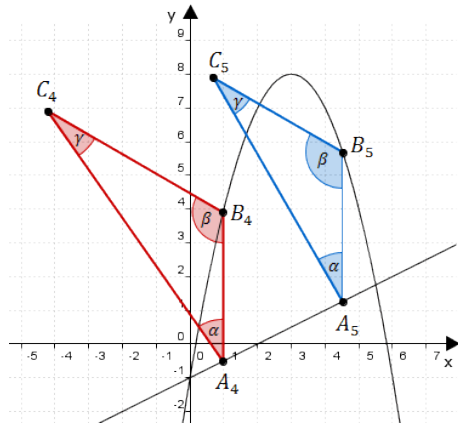
⇒ Es gibt kein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE.

### Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken  $A_n B_n C_n$  gibt es die Dreiecke  $A_4 B_4 C_4$  und  $A_5 B_5 C_5$ , in denen die Winkel  $A_4 C_4 B_4$  und  $A_5 C_5 B_5$  jeweils das Maß  $\gamma = 25^\circ$  haben. Berechnen Sie die Länge der Seiten  $[A_4 B_4]$  bzw.  $[A_5 B_5]$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

### Lösung zu Aufgabe A1.5

#### Länge einer Strecke



Gegeben:  $\beta = 120^\circ$ ,  $\gamma = 25^\circ$   $\overline{B_n C_n} = 6$  LE

Jetzt ist auch der Winkel  $\alpha$  berechenbar.

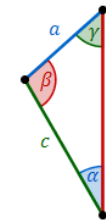
Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ - 25^\circ = 35^\circ$$

Im Dreieck  $A_4 B_4 C_4$  bzw.  $A_5 B_5 C_5$  kann der Sinussatz angewendet werden.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{B_n C_n}}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\overline{A_n B_n}}{\sin 25^\circ} = \frac{6}{\sin 35^\circ} \quad | \cdot \sin 25^\circ$$

$$\overline{A_n B_n} = \frac{6 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{A_4 B_4} = \overline{A_5 B_5} = 4,42 \text{ LE}$$