Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte $P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p.

Aufgabe A1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leqq x \leqq 7$; $-3 \leqq y \leqq 11$
[Teilergebnis: $p : y = -x^2 + 6x - 1$]

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\left(x|\frac{1}{2}x - 1\right)$ auf der Geraden g und Punkte $B_n\left(x|-x^2 + 6x - 1\right)$ auf der Parabel p mit $0 < x < 5,5$ $(x \in \mathbb{R})$ haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$. Die Winkel $C_n\,B_n\,A_n$ besitzen stets das Maß $\beta = 120°$ und für die Seiten $[B_n\,C_n]$ gilt: $\overline{B_n\,C_n} = 6$ LE.
Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ für $x = 0,5$ und $A_2\,B_2\,C_2$ für $x = 4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren $\overrightarrow{B_n\,C_n}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt: $\overrightarrow{B_n\,C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes C_3 des Dreiecks $A_3\,B_3\,C_3$ für $x = 1,5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Aufgabe A1.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.
Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.
[Teilergebnis: $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$ FE]

Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ gibt es die Dreiecke $A_4\,B_4\,C_4$ und $A_5\,B_5\,C_5$, in denen die Winkel $A_4\,C_4\,B_4$ und $A_5\,C_5\,B_5$ jeweils das Maß $\gamma = 25°$ haben.
Berechnen Sie die Länge der Seiten $[A_4\,B_4]$ bzw. $[A_5\,B_5]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

© Realschulrep.de

Lösung

Aufgabe A1.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte $P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p.

Aufgabe A1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p sowie die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
Zeichnen Sie sodann die Parabel p und die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-6 \leqq x \leqq 7$; $-3 \leqq y \leqq 11$
[Teilergebnis: $p : y = -x^2 + 6x - 1$]

Lösung zu Aufgabe A1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

Gerade $g : y = \frac{1}{2}x - 1$

$P(0|-1)$ und $Q(5,5|1,75)$ sind die Schnittpunkte der Geraden g mit einer nach unten geöffneten Normalparabel p.

Vorüberlegung: Welche Form hat eine nach unten geöffnete Normalparabel?

Erläuterung: *Parabelgleichung bestimmen*

Eine nach unten geöffnete Parabel hat die Form $y = -a\,x^2 + b\,x + c$.

Bei einer Normalparabel ist zusätzlich $a = 1$.

$\Rightarrow \quad y = -x^2 + b\,x + c$

$y = -x^2 + b\,x + c$

Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung eingesetzt und man erhält ein Gleichungssystem:

(I) $-1 = 0^2 + b \cdot 0 + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = -1$

(II) $1,75 = -5,5^2 + b \cdot 5,5 + c$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Einsetzverfahren*

$c = -1$ wird in Gleichung (II) eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach b aufgelöst.

(II) $1,75 = -5,5^2 + b \cdot 5,5 - 1 \quad | \quad +5,5^2 + 1$

(II) $33 = 5,5b \quad | \quad : 5,5$

$\Rightarrow \quad b = 6$

$\Rightarrow \quad p : y = -x^2 + 6x - 1$

Bestimmung des Scheitelpunktes:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S:

$S\left(-\frac{b}{2a}|c - \frac{b^2}{4a}\right)$ (siehe Formelsammlung)

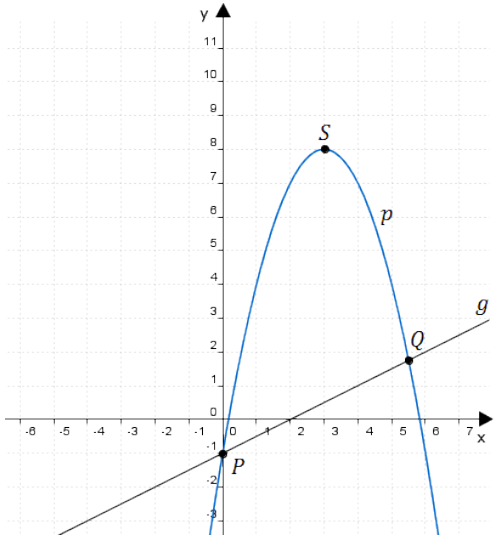
$S\left(-\frac{6}{2 \cdot (-1)}| - 1 - \frac{6^2}{4 \cdot (-1)}\right)$

$\Rightarrow \quad S(3|8)$

Skizze

Parabel g (Wertetabelle oder Schablone hilfreich) und Gerade g einzeichnen:

© Realschulrep.de



Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\left(x|\frac{1}{2}x-1\right)$ auf der Geraden g und Punkte $B_n\left(x|-x^2+6x-1\right)$ auf der Parabel p mit $0<x<5,5$ $(x\in\mathbb{R})$ haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$. Die Winkel $C_n\,B_n\,A_n$ besitzen stets das Maß $\beta=120°$ und für die Seiten $[B_n\,C_n]$ gilt: $\overline{B_n\,C_n}=6$ LE.
Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ für $x=0,5$ und $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=4$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Skizze

Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ und $A_2\,B_2\,C_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

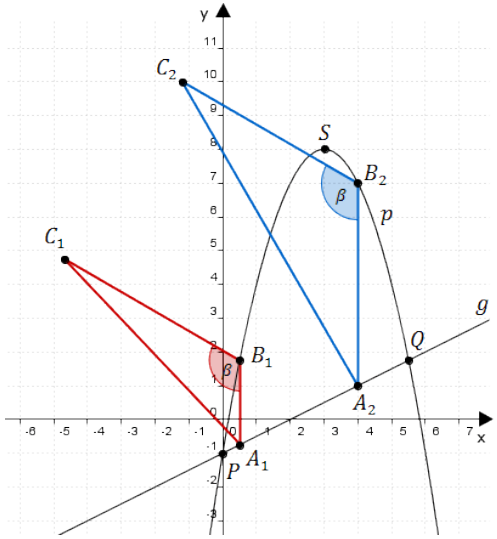
1) Punkte A_1 auf g und B_1 auf p mit dem x-Wert $0,5$ einzeichnen.

2) Punkte A_1 und B_1 verbinden

3) Den Schenkel $[B_1\,C_1]$ im Winkel von $\measuredangle C_1\,B_1\,A_1=120°$ nach links oben mit der Länge 6 cm einzeichnen

4) Punkte zum Dreieck verbinden

Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ analog.



Aufgabe A1.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für alle Vektoren $\overrightarrow{B_n\,C_n}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet gilt: $\overrightarrow{B_n\,C_n}=\begin{pmatrix}-5,20\\3\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sodann die Koordinaten des Punktes C_3 des Dreiecks $A_3\,B_3\,C_3$ für $x = 1,5$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.3

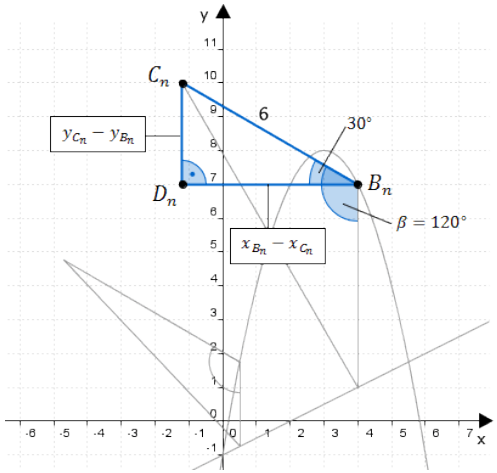
Vektor bestimmen

Gegeben: $\overline{B_n\,C_n} = 6$ LE

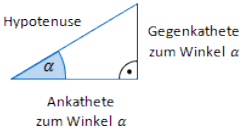
Zu zeigen: $\overrightarrow{B_n\,C_n} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es gilt allgemein: $\overrightarrow{B_n\,C_n} = \begin{pmatrix} x_{C_n} - x_{B_n} \\ y_{C_n} - y_{B_n} \end{pmatrix}$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck $B_n\,C_n\,D_n$ in der folgenden Hilfsskizze:



Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

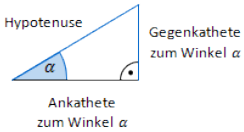
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\cos 30° = \dfrac{x_{B_n} - x_{C_n}}{6} \quad | \quad \cdot 6$

$x_{B_n} - x_{C_n} = 6\cos 30° \quad | \quad \cdot(-1)$

$x_{C_n} - x_{B_n} = -6\cos 30° = -5,20$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\sin 30° = \dfrac{y_{C_n} - y_{B_n}}{6} \quad | \quad \cdot 6$

$y_{C_n} - y_{B_n} = 6\sin 30° = 3$

© Realschulrep.de

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{B_n C_n} = \begin{pmatrix} x_{C_n} - x_{B_n} \\ y_{C_n} - y_{B_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5,20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe A1.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet den Flächeninhalt A der Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n.
Überprüfen Sie sodann, ob es unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt.
[Teilergebnis: $A(x) = 2,60 \cdot (-x^2 + 5,5x)$ FE]

Lösung zu Aufgabe A1.4

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben:

$\beta = 120°, \quad \overline{B_n C_n} = 6$ LE

$A_n\left(x|\frac{1}{2}x - 1\right), \quad B_n\left(x|-x^2 + 6x - 1\right)$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck $A\,B\,C$ zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot \overline{B_n C_n} \cdot \sin\beta$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot 6 \cdot \sin 120°$$

$$A = 2,60 \cdot \overline{A_n B_n}$$

Nun muss noch $\overline{A_n B_n}$ berechnet werden.

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte A_n und B_n die gleiche Abszisse (x-Wert) haben und die Punkte B_n oberhalb den Punkten A_n liegen, gilt:

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 6x - 1 - \left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 6x - 1 - \frac{1}{2}x + 1$$

$$\overline{A_n B_n} = -x^2 + 5,5x$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = 2,60 \cdot \left(-x^2 + 5,5x\right) \text{ FE}$$

Überprüfen, ob es unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ ein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE gibt:

Erläuterung: *Einsetzen*

$A = 22$ wird in die Gleichung $A = 2,60 \cdot \left(-x^2 + 5,5x\right)$ eingesetzt.

Anschließend wird überprüft, ob sich die Gleichung nach x auflösen lässt.

$$2,60 \cdot \left(-x^2 + 5,5x\right) = 22$$

$$-2,60x^2 + 2,60 \cdot 5,5x = 22 \quad | \quad -22$$

$$-2,60x^2 + 2,60 \cdot 5,5x - 22 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Es reicht, nur die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ zu überprüfen.

Falls die Diskriminante negativ ist, existiert keine Lösung.

© Realschulrep.de

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = (2,60 \cdot 5,5)^2 - 4 \cdot (-2,60) \cdot (-22) = -24,31 < 0$

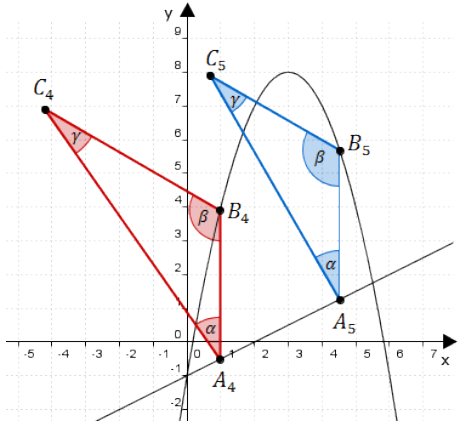
$\Rightarrow$ Es gibt kein Dreieck mit einem Flächeninhalt von 22 FE.

Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ gibt es die Dreiecke $A_4\,B_4\,C_4$ und $A_5\,B_5\,C_5$, in denen die Winkel $A_4\,C_4\,B_4$ und $A_5\,C_5\,B_5$ jeweils das Maß $\gamma = 25°$ haben.
Berechnen Sie die Länge der Seiten $[A_4\,B_4]$ bzw. $[A_5\,B_5]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.5

Länge einer Strecke



Gegeben: $\beta = 120°$, $\gamma = 25°$ $\overline{B_n\,C_n} = 6$ LE

Jetzt ist auch der Winkel α berechenbar.

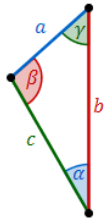
Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180°.

$\alpha = 180° - 120° - 25° = 35°$

Im Dreieck $A_4\,B_4\,C_4$ bzw. $A_5\,B_5\,C_5$ kann der Sinussatz angewendet werden.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{A_n\,B_n}}{\sin\gamma} = \frac{\overline{B_n\,C_n}}{\sin\alpha}$$

$$\frac{\overline{A_n\,B_n}}{\sin 25°} = \frac{6}{\sin 35°} \quad | \quad \cdot \sin 25°$$

$$\overline{A_n\,B_n} = \frac{6 \cdot \sin 25°}{\sin 35°}$$

$\Rightarrow$ $\overline{A_4\,B_4} = \overline{A_5\,B_5} = 4,42$ LE

© Realschulrep.de