

Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik II NT Aufgabe C1

Aufgabe C1.

Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + bx + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(1|11,25)$ und $Q(8|6)$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe C1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 - 3x + 14$ hat.
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p .
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g im Bereich von $1 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 13$; $-4 \leq y \leq 12$

Aufgabe C1.2 (2 Punkte)

Punkte A_n auf der Geraden g und Punkte C_n auf der Parabel p haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und D_n Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$.
Für alle Rauten gilt: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe C1.3 (1 Punkt)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge $\overline{A_n C_n}$ aller Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n wie folgt darstellen lässt:
 $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE.

Aufgabe C1.4 (3 Punkte)

Die Raute $A_0 B_0 C_0 D_0$ besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt A_{min} .
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und den Flächeninhalt A_{min} .

Aufgabe C1.5 (3 Punkte)

Unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es zwei Quadrate $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$.
Berechnen Sie die zugehörigen Werte für x .

Aufgabe C1.6 (2 Punkte)

Unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es zwei Rauten $A_5 B_5 C_5 D_5$ und $A_6 B_6 C_6 D_6$ mit der Diagonalenlänge $\overline{A_5 C_5} = 7$ LE bzw. $\overline{A_6 C_6} = 7$ LE.
Zeichnen Sie die Diagonalen $[A_5 C_5]$ und $[A_6 C_6]$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden $C_5 C_6$ an.

Lösung

Aufgabe C1.

Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = 0,25x^2 + bx + c$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(1|11,25)$ und $Q(8|6)$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 2$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe C1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = 0,25x^2 - 3x + 14$ hat.
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels S der Parabel p .
Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g im Bereich von $1 \leq x \leq 11$ in ein Koordinatensystem ein.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leq x \leq 13$; $-4 \leq y \leq 12$

Lösung zu Aufgabe C1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$$p : y = 0,25x^2 + bx + c$$

$$P(1|11,25), \quad Q(8|6) \quad \text{liegen auf } p$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung eingesetzt. Dann erhält man zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten b und c .

$$(I) \quad 11,25 = 0,25 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$(II) \quad 6 = 0,25 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$$

$$(I) \quad 11,25 = 0,25 + b + c$$

$$(II) \quad 6 = 16 + 8b + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (II) wird von Gleichung (I) subtrahiert, so dass die Variable c wegfällt.

$$(I)-(II) \quad 5,25 = -15,75 - 7b \quad | \quad +15,75$$

$$(I)-(II) \quad 21 = -7b \quad | \quad :(-7)$$

$$\Rightarrow \quad b = -3$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$b = -3$ wird in Gleichung (II) $6 = 16 + 8b + c$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach c aufgelöst.

$$b = -3 \text{ in (II):}$$

$$6 = 16 + 8 \cdot (-3) + c$$

$$6 = -8 + c \quad | \quad +8$$

$$\Rightarrow \quad c = 14$$

$$\Rightarrow \quad p : y = 0,25x^2 - 3x + 14$$

Koordinaten von Punkten ermitteln

Bestimmung des Scheitelpunktes S :

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S :

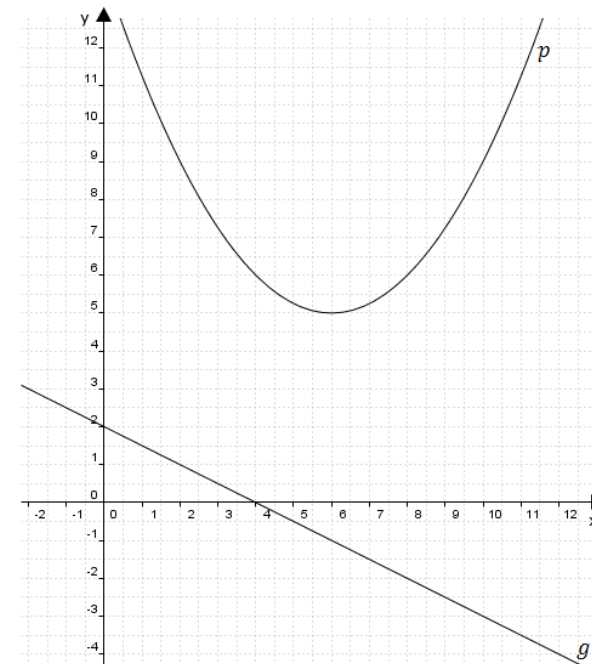
$$S \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$S \left(-\frac{-3}{2 \cdot 0,25} \mid 14 - \frac{(-3)^2}{4 \cdot 0,25} \right)$$

$$\Rightarrow \quad S(6|5)$$

Skizze

Parabel $p : y = 0,25x^2 - 3x + 14$ (Wertetabelle hilfreich) und Gerade $g : y = -0,5x + 2$ einzeichnen:



Aufgabe C1.2 (2 Punkte)

Punkte A_n auf der Geraden g und Punkte C_n auf der Parabel p haben jeweils dieselbe Abszisse x und sind zusammen mit Punkten B_n und D_n Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$. Für alle Rauten gilt: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE.

Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 9$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

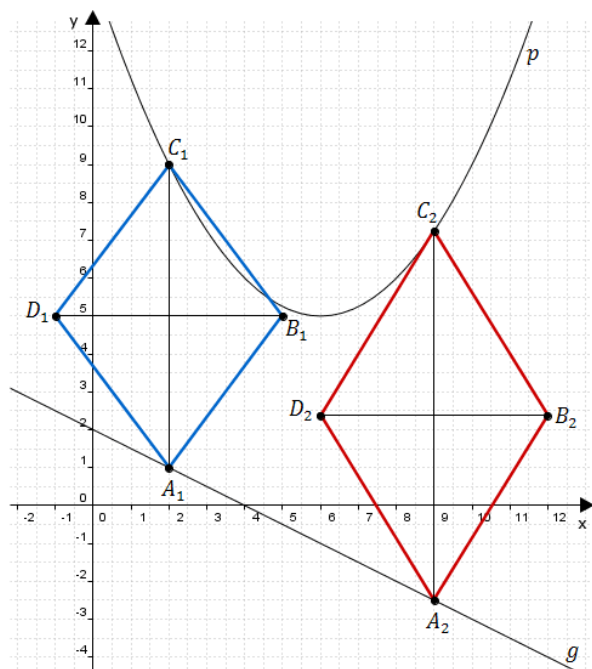
Lösung zu Aufgabe C1.2

Skizze

Raute $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 9$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Punkte A_1 auf g und C_1 auf p einzeichnen
 - 2) Diagonale $[A_1 C_1]$ verbinden
 - 3) Die Diagonale $[B_1 D_1]$ steht senkrecht auf $[A_1 C_1]$ und beide Diagonalen schneiden sich jeweils in der Mitte
- Raute $A_2 B_2 C_2 D_2$ analog.

**Aufgabe C1.3** (1 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge $\overline{A_n C_n}$ aller Raute $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n wie folgt darstellen lässt:
 $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE.

Lösung zu Aufgabe C1.3**Länge einer Strecke**

Gegeben:

Punkte A_n liegen auf der Geraden g

$$\Rightarrow A_n(x | -0,5x + 2)$$

Punkte C_n liegen auf der Parabel p

$$\Rightarrow C_n(x | 0,25x^2 - 3x + 14)$$

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Da die Punkte A_n und C_n die gleiche Abszisse haben und die Punkte C_n oberhalb der Punkte A_n liegen, gilt:

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - 3x + 14 - (-0,5x + 2)$$

$$\overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - 3x + 14 + 0,5x - 2$$

$$\overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - 2,5x + 12$$

Aufgabe C1.4 (3 Punkte)

Die Raute $A_0 B_0 C_0 D_0$ besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt A_{min} . Berechnen Sie den zugehörigen Wert für x und den Flächeninhalt A_{min} .

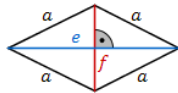
Lösung zu Aufgabe C1.4

Flächeninhalt einer Raute

Gegeben: $\overline{B_n D_n} = 6$ LE, $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE

Berechnung des Flächeninhaltes $A(x)$ der Rauten $A_n B_n C_n D_n$:

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \cdot \overline{B_n D_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (0,25x^2 - 2,5x + 12) \cdot 6$$

$$A(x) = 0,75x^2 - 7,5x + 36$$

$A(x)$ hat die Form einer nach oben geöffneten Parabel. Deshalb liegt beim Scheitelpunkt das Minimum vor.

Bestimmung des Scheitelpunktes S von $A(x)$:

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = ax^2 + bx + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S :

$$S \left(-\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$S \left(-\frac{-7,5}{2 \cdot 0,75} \mid 36 - \frac{(-7,5)^2}{4 \cdot 0,75} \right)$$

$S(5 \mid 17,25)$

\Rightarrow Bei $x = 5$ hat die Raute $A_0 B_0 C_0 D_0$ den kleinstmöglichen Flächeninhalt $A_{\min} = 17,25$ FE.

Aufgabe C1.5 (3 Punkte)

Unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es zwei Quadrate $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$. Berechnen Sie die zugehörigen Werte für x .

Lösung zu Aufgabe C1.5**2-dimensionale Geometrie**

Gegeben: $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$ LE, $\overline{B_n D_n} = 6$ LE

Im Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang.

$$\Rightarrow \overline{A_n C_n} = \overline{B_n D_n}$$

$$0,25x^2 - 2,5x + 12 = 6 \quad | \quad -6$$

$$0,25x^2 - 2,5x + 6 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2,5) \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 6}}{2 \cdot 0,25}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 6 \quad \text{und} \quad x_2 = 4$$

Aufgabe C1.6 (2 Punkte)

Unter den Rauten $A_n B_n C_n D_n$ gibt es zwei Rauten $A_5 B_5 C_5 D_5$ und $A_6 B_6 C_6 D_6$ mit der Diagonalenlänge $\overline{A_5 C_5} = 7$ LE bzw. $\overline{A_6 C_6} = 7$ LE.

Zeichnen Sie die Diagonalen $[A_5 C_5]$ und $[A_6 C_6]$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden $C_5 C_6$ an.

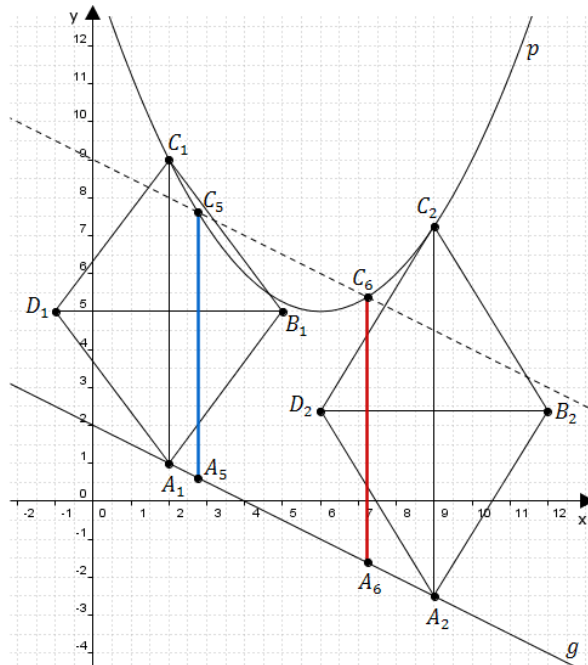
Lösung zu Aufgabe C1.6

Skizze

Diagonalen $[A_5 C_5]$ und $[A_6 C_6]$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

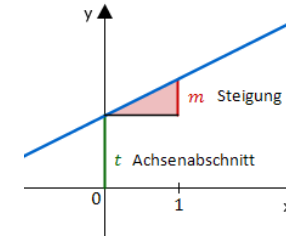
Die Gerade g wird parallel um 7 cm nach oben verschoben. Die erhaltene Gerade g' schneidet die Parabel p in den Punkten C_5 und C_6 .



Geradengleichung aufstellen

Gesucht: Gerade $C_5 C_6 : y = ?$

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y = m \cdot x + t$$

Dabei ist

m die Steigung der Geraden
 t der y -Achsenabschnitt

Da die Gerade $C_5 C_6$ parallel zur Gerade g ist, haben beide Geraden die Steigung $m = -0,5$.

Der y -Achsenabschnitt $t = 9$ lässt sich aus der Zeichnung ablesen.

$$\Rightarrow C_5 C_6 : y = -0,5x + 9$$