

## Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik II NT Aufgabe C1

### Aufgabe C1.

Die Parabel  $p$  hat eine Gleichung der Form  $y = 0,25x^2 + bx + c$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $b, c \in \mathbb{R}$ . Die Parabel  $p$  verläuft durch die Punkte  $P(1|11,25)$  und  $Q(8|6)$ .  
Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = -0,5x + 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe C1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für  $b$  und  $c$ , dass die Parabel  $p$  die Gleichung  $y = 0,25x^2 - 3x + 14$  hat.  
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels  $S$  der Parabel  $p$ .  
Zeichnen Sie die Parabel  $p$  und die Gerade  $g$  im Bereich von  $1 \leq x \leq 11$  in ein Koordinatensystem ein.  
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-2 \leq x \leq 13$ ;  $-4 \leq y \leq 12$

#### Aufgabe C1.2 (2 Punkte)

Punkte  $A_n$  auf der Geraden  $g$  und Punkte  $C_n$  auf der Parabel  $p$  haben jeweils dieselbe Abszisse  $x$  und sind zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $D_n$  Eckpunkte von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .  
Für alle Rauten gilt:  $\overline{B_n D_n} = 6$  LE.  
Zeichnen Sie die Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 2$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 9$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

#### Aufgabe C1.3 (1 Punkt)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge  $\overline{A_n C_n}$  aller Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $C_n$  wie folgt darstellen lässt:  
 $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$  LE.

#### Aufgabe C1.4 (3 Punkte)

Die Raute  $A_0 B_0 C_0 D_0$  besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt  $A_{min}$ .  
Berechnen Sie den zugehörigen Wert für  $x$  und den Flächeninhalt  $A_{min}$ .

#### Aufgabe C1.5 (3 Punkte)

Unter den Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  gibt es zwei Quadrate  $A_3 B_3 C_3 D_3$  und  $A_4 B_4 C_4 D_4$ .  
Berechnen Sie die zugehörigen Werte für  $x$ .

#### Aufgabe C1.6 (2 Punkte)

Unter den Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  gibt es zwei Rauten  $A_5 B_5 C_5 D_5$  und  $A_6 B_6 C_6 D_6$  mit der Diagonalenlänge  $\overline{A_5 C_5} = 7$  LE bzw.  $\overline{A_6 C_6} = 7$  LE.  
Zeichnen Sie die Diagonalen  $[A_5 C_5]$  und  $[A_6 C_6]$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden  $C_5 C_6$  an.

## Lösung

### Aufgabe C1.

Die Parabel  $p$  hat eine Gleichung der Form  $y = 0,25x^2 + bx + c$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $b, c \in \mathbb{R}$ . Die Parabel  $p$  verläuft durch die Punkte  $P(1|11,25)$  und  $Q(8|6)$ .  
Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = -0,5x + 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe C1.1 (5 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für  $b$  und  $c$ , dass die Parabel  $p$  die Gleichung  $y = 0,25x^2 - 3x + 14$  hat.  
Ermitteln Sie sodann die Koordinaten des Scheitels  $S$  der Parabel  $p$ .  
Zeichnen Sie die Parabel  $p$  und die Gerade  $g$  im Bereich von  $1 \leq x \leq 11$  in ein Koordinatensystem ein.  
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-2 \leq x \leq 13$ ;  $-4 \leq y \leq 12$

#### Lösung zu Aufgabe C1.1

#### Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$$p : y = 0,25x^2 + bx + c$$

$$P(1|11,25), \quad Q(8|6) \quad \text{liegen auf } p$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Punkte  $P$  und  $Q$  werden in die Parabelgleichung eingesetzt. Dann erhält man zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten  $b$  und  $c$ .

$$(I) \quad 11,25 = 0,25 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$(II) \quad 6 = 0,25 \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c$$

$$(I) \quad 11,25 = 0,25 + b + c$$

$$(II) \quad 6 = 16 + 8b + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (II) wird von Gleichung (I) subtrahiert, so dass die Variable  $c$  wegfällt.

$$(I)-(II) \quad 5,25 = -15,75 - 7b \quad | \quad +15,75$$

$$(I)-(II) \quad 21 = -7b \quad | \quad :(-7)$$

$$\Rightarrow \quad b = -3$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$b = -3$  wird in Gleichung (II)  $6 = 16 + 8b + c$  eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach  $c$  aufgelöst.

$$b = -3 \text{ in (II):}$$

$$6 = 16 + 8 \cdot (-3) + c$$

$$6 = -8 + c \quad | \quad +8$$

$$\Rightarrow \quad c = 14$$

$$\Rightarrow \quad p : y = 0,25x^2 - 3x + 14$$

### **Koordinaten von Punkten ermitteln**

Bestimmung des Scheitelpunktes  $S$ :

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$  besitzt folgenden Scheitelpunkt  $S$ :

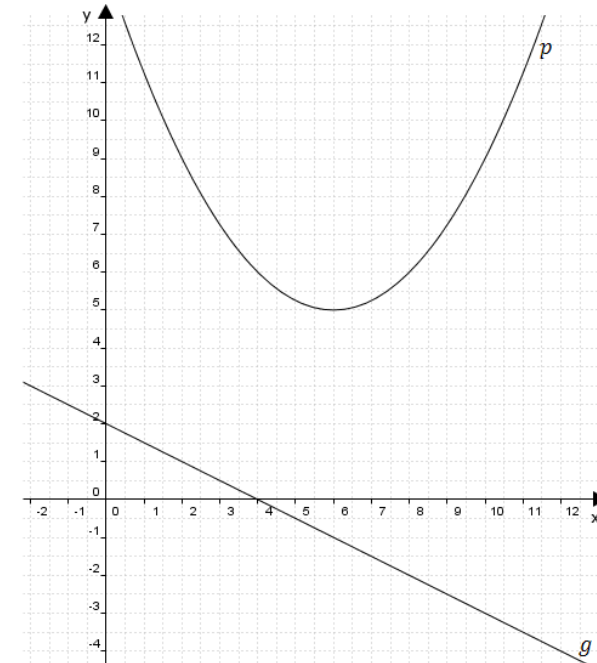
$$S \left( -\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$S \left( -\frac{-3}{2 \cdot 0,25} \mid 14 - \frac{(-3)^2}{4 \cdot 0,25} \right)$$

$$\Rightarrow \quad S(6|5)$$

### **Skizze**

Parabel  $p : y = 0,25x^2 - 3x + 14$  (Wertetabelle hilfreich) und Gerade  $g : y = -0,5x + 2$  einzeichnen:



### **Aufgabe C1.2 (2 Punkte)**

Punkte  $A_n$  auf der Geraden  $g$  und Punkte  $C_n$  auf der Parabel  $p$  haben jeweils dieselbe Abszisse  $x$  und sind zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $D_n$  Eckpunkte von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ . Für alle Rauten gilt:  $\overline{B_n D_n} = 6$  LE.

Zeichnen Sie die Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 2$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 9$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

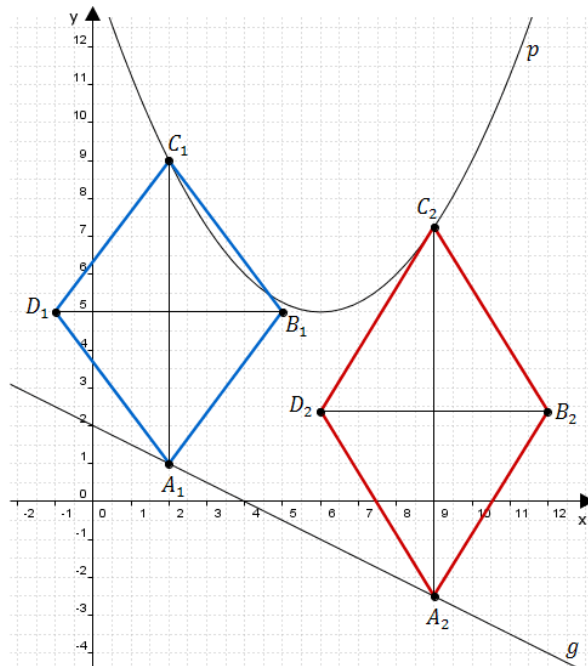
### **Lösung zu Aufgabe C1.2**

**Skizze**

Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 2$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 9$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Punkte  $A_1$  auf  $g$  und  $C_1$  auf  $p$  einzeichnen
  - 2) Diagonale  $[A_1 C_1]$  verbinden
  - 3) Die Diagonale  $[B_1 D_1]$  steht senkrecht auf  $[A_1 C_1]$  und beide Diagonalen schneiden sich jeweils in der Mitte
- Raute  $A_2 B_2 C_2 D_2$  analog.

**Aufgabe C1.3** (1 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Diagonalenlänge  $\overline{A_n C_n}$  aller Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  und  $C_n$  wie folgt darstellen lässt:  
 $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$  LE.

**Lösung zu Aufgabe C1.3****Länge einer Strecke**

Gegeben:

Punkte  $A_n$  liegen auf der Geraden  $g$

$$\Rightarrow A_n(x | -0,5x + 2)$$

Punkte  $C_n$  liegen auf der Parabel  $p$

$$\Rightarrow C_n(x | 0,25x^2 - 3x + 14)$$

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Da die Punkte  $A_n$  und  $C_n$  die gleiche Abszisse haben und die Punkte  $C_n$  oberhalb der Punkte  $A_n$  liegen, gilt:

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - 3x + 14 - (-0,5x + 2)$$

$$\overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - 3x + 14 + 0,5x - 2$$

$$\overline{A_n C_n} = 0,25x^2 - 2,5x + 12$$

**Aufgabe C1.4** (3 Punkte)

Die Raute  $A_0 B_0 C_0 D_0$  besitzt den kleinstmöglichen Flächeninhalt  $A_{min}$ . Berechnen Sie den zugehörigen Wert für  $x$  und den Flächeninhalt  $A_{min}$ .

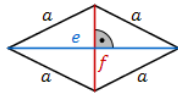
**Lösung zu Aufgabe C1.4**

**Flächeninhalt einer Raute**

Gegeben:  $\overline{B_n D_n} = 6$  LE,  $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$  LE

Berechnung des Flächeninhaltes  $A(x)$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ :

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen  $e$  und  $f$  hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n C_n} \cdot \overline{B_n D_n}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (0,25x^2 - 2,5x + 12) \cdot 6$$

$$A(x) = 0,75x^2 - 7,5x + 36$$

$A(x)$  hat die Form einer nach oben geöffneten Parabel. Deshalb liegt beim Scheitelpunkt das Minimum vor.

Bestimmung des Scheitelpunktes  $S$  von  $A(x)$ :

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$  besitzt folgenden Scheitelpunkt  $S$ :

$$S \left( -\frac{b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad (\text{siehe Formelsammlung})$$

$$S \left( -\frac{-7,5}{2 \cdot 0,75} \mid 36 - \frac{(-7,5)^2}{4 \cdot 0,75} \right)$$

$S(5 \mid 17,25)$

$\Rightarrow$  Bei  $x = 5$  hat die Raute  $A_0 B_0 C_0 D_0$  den kleinstmöglichen Flächeninhalt  $A_{\min} = 17,25$  FE.

**Aufgabe C1.5 (3 Punkte)**

Unter den Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  gibt es zwei Quadrate  $A_3 B_3 C_3 D_3$  und  $A_4 B_4 C_4 D_4$ . Berechnen Sie die zugehörigen Werte für  $x$ .

**Lösung zu Aufgabe C1.5****2-dimensionale Geometrie**

Gegeben:  $\overline{A_n C_n}(x) = (0,25x^2 - 2,5x + 12)$  LE,  $\overline{B_n D_n} = 6$  LE

Im Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang.

$$\Rightarrow \overline{A_n C_n} = \overline{B_n D_n}$$

$$0,25x^2 - 2,5x + 12 = 6 \quad | -6$$

$$0,25x^2 - 2,5x + 6 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2,5) \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 6}}{2 \cdot 0,25}$$

$$\Rightarrow x_1 = 6 \text{ und } x_2 = 4$$

**Aufgabe C1.6 (2 Punkte)**

Unter den Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  gibt es zwei Rauten  $A_5 B_5 C_5 D_5$  und  $A_6 B_6 C_6 D_6$  mit der Diagonalenlänge  $\overline{A_5 C_5} = 7$  LE bzw.  $\overline{A_6 C_6} = 7$  LE.

Zeichnen Sie die Diagonalen  $[A_5 C_5]$  und  $[A_6 C_6]$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und geben Sie die Gleichung der Geraden  $C_5 C_6$  an.

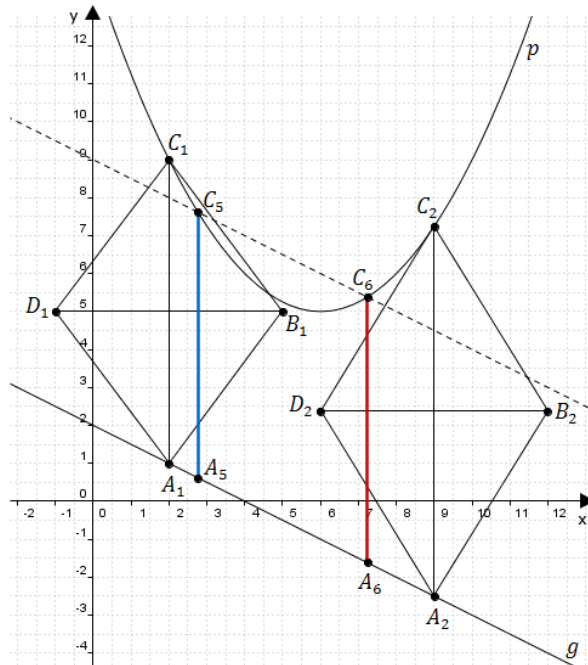
### Lösung zu Aufgabe C1.6

#### Skizze

Diagonalen  $[A_5 C_5]$  und  $[A_6 C_6]$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

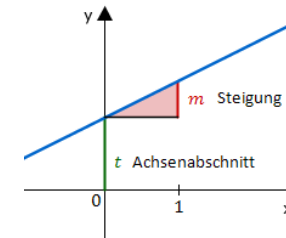
Die Gerade  $g$  wird parallel um 7 cm nach oben verschoben. Die erhaltene Gerade  $g'$  schneidet die Parabel  $p$  in den Punkten  $C_5$  und  $C_6$ .



#### Geradengleichung aufstellen

Gesucht: Gerade  $C_5 C_6 : y = ?$

Erläuterung: *Geradengleichung*



Die Funktionsgleichung einer Geraden lautet:

$$y = m \cdot x + t$$

Dabei ist

$m$  die Steigung der Geraden  
 $t$  der  $y$ -Achsenabschnitt

Da die Gerade  $C_5 C_6$  parallel zur Gerade  $g$  ist, haben beide Geraden die Steigung  $m = -0,5$ .

Der  $y$ -Achsenabschnitt  $t = 9$  lässt sich aus der Zeichnung ablesen.

$$\Rightarrow C_5 C_6 : y = -0,5x + 9$$