

## Mittlere-Reife-Prüfung 2005 Mathematik I Aufgabe A1

### Aufgabe A1.

Nach der Verabreichung eines Medikaments wird dieses im menschlichen Körper abgebaut. Nach  $x$  h (Stunden) beträgt die Masse des Medikaments im Körper  $y$  mg. Messungen zeigen, dass der Abbau von Medikamenten im Körper durch die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;  $y_0 \in \mathbb{R}^+$ ;  $n \in \mathbb{R}$ ) dargestellt werden kann. Dabei bedeutet  $y_0$  mg die Anfangsmasse des verabreichten Medikaments und  $n$  die Abklingrate der Konzentration des Medikaments im Körper. Um 8:00 Uhr werden einem Patienten 5,0 mg eines Medikaments verabreicht. Für dieses Medikament gilt:  $n = -0,07572$

#### Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  für  $x \in [0; 8]$  in Schritten von  $\Delta x = 1$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 1 h;  $0 \leq x \leq 9$

Auf der y-Achse: 1 cm für 0,5 mg;  $0 \leq y \leq 5,5$

#### Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Medikaments der Körper stündlich abbaut. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

#### Aufgabe A1.3 (4 Punkte)

Um die optimale Wirksamkeit des Medikaments zu erreichen, darf die Masse des Medikaments im Körper 1,5 mg nicht unterschreiten und 8 mg nicht überschreiten.

Berechnen Sie die Uhrzeiten auf Minuten genau, zu denen die nächste Verabreichung von ebenfalls 5,0 mg frühestens oder spätestens erfolgen muss.

#### Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Die zweite Verabreichung von 5,0 mg des Medikaments erfolgt um 12:30 Uhr.

Berechnen Sie die um 16:00 Uhr im Körper befindliche Masse. (Auf zwei Stellen nach dem Komma.)

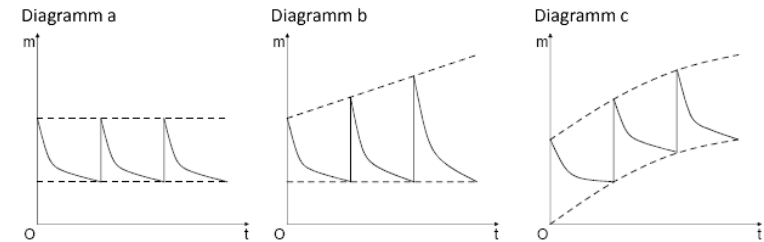
#### Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Ein anderes Medikament wird vom Körper nach 4 Stunden zur Hälfte abgebaut. Berechnen Sie für dieses Medikament den Wert für  $n$  auf fünf Stellen nach dem Komma gerundet.

### Aufgabe A1.6 (2 Punkte)

Ein Patient nimmt dreimal hintereinander die gleiche Masse des Medikaments aus 1.5 im Abstand von 6 Stunden ein. Einer der Graphen in den unten stehenden Diagrammen a, b und c stellt die Masse des Medikaments im Körper des Patienten qualitativ in Abhängigkeit von der Zeit dar.

Geben Sie das zugehörige Diagramm an und begründen Sie ihre Auswahl.



## Lösung

## Aufgabe A1.

Nach der Verabreichung eines Medikaments wird dieses im menschlichen Körper abgebaut. Nach  $x$  h (Stunden) beträgt die Masse des Medikaments im Körper  $y$  mg. Messungen zeigen, dass der Abbau von Medikamenten im Körper durch die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;  $y_0 \in \mathbb{R}^+$ ;  $n \in \mathbb{R}$ ) dargestellt werden kann. Dabei bedeutet  $y_0$  mg die Anfangsmasse des verabreichten Medikaments und  $n$  die Abklingrate der Konzentration des Medikaments im Körper. Um 8:00 Uhr werden einem Patienten 5,0 mg eines Medikaments verabreicht. Für dieses Medikament gilt:  $n = -0,07572$

## Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  für  $x \in [0; 8]$  in Schritten von  $\Delta x = 1$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 1 h;  $0 \leq x \leq 9$

Auf der y-Achse: 1 cm für 0,5 mg;  $0 \leq y \leq 5,5$

## Lösung zu Aufgabe A1.1

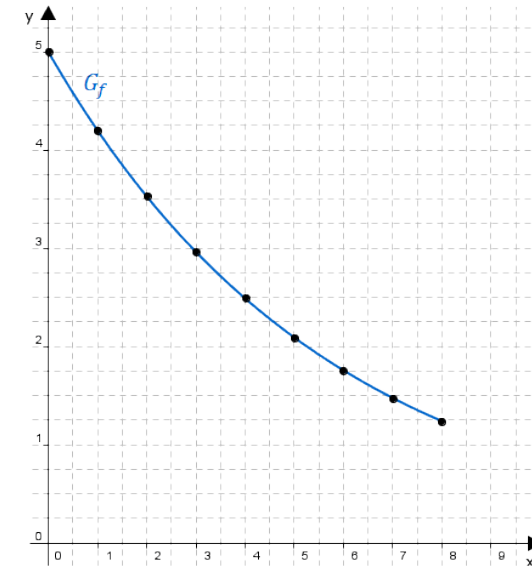
## Skizze

Gegeben:  $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$

Wertetabelle erstellen:

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5,00	4,20	3,53	2,96	2,49	2,09	1,76	1,48	1,24

Graph  $G_f$  einzeichnen:



## Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie, wie viel Prozent des Medikaments der Körper stündlich abbaut. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

## Lösung zu Aufgabe A1.2

## Exponentielles Wachstum

Gegeben:  $f : y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$

Gesucht: Menge  $y$  nach einer Stunde, d.h.  $x = 1$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 1$  wird in  $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  eingesetzt.

$$y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot 1} \approx 4,20$$

Abgebaute Menge nach einer Stunde:  $5,0 \text{ mg} - 4,20 \text{ mg} = 0,80 \text{ mg}$

$$\text{Abgebaute Menge in Prozent: } \frac{0,80}{5,0} = 0,16 = 16\%$$

Antwort:

Der Körper baut stündlich 16% des Medikaments ab.

### Aufgabe A1.3 (4 Punkte)

Um die optimale Wirksamkeit des Medikaments zu erreichen, darf die Masse des Medikaments im Körper 1,5 mg nicht unterschreiten und 8 mg nicht überschreiten.

Berechnen Sie die Uhrzeiten auf Minuten genau, zu denen die nächste Verabreichung von ebenfalls 5,0 mg frühestens oder spätestens erfolgen muss.

### Lösung zu Aufgabe A1.3

#### Exponentielles Wachstum

Gegeben:  $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$ ;  $y_{\min} = 1,5 \text{ mg}$ ;  $y_{\max} = 8 \text{ mg}$

Erläuterung: *Einsetzen*

$y = 1,5$  wird in  $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach  $x$  aufgelöst.

Dann erhält man die Anzahl der Stunden, nach denen die Menge des Medikaments die Untergrenze von 1,5 mg erreicht.

$$1,5 = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad : 5,0$$

$$\frac{1,5}{5,0} = 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad \log_{10}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion  $10^{-0,07572 \cdot x}$  kann durch den Logarithmus  $\log_{10}$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } 2^x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 2^x = \log_2 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

$$\log_{10} \frac{1,5}{5,0} = -0,07572 \cdot x \quad | \quad : (-0,07572)$$

$$x = \frac{\log_{10} \frac{1,5}{5,0}}{-0,07572} \approx 6,91$$

Umrechnung in Minuten:

0,91 Stunden sind  $0,91 \cdot 60 \approx 55$  Minuten

$\Rightarrow$  6,91 Stunden sind 6 Stunden und 55 Minuten

Zur Startzeit um 8 Uhr werden nun 6 Stunden und 55 Minuten addiert.

Antwort:

Spätestens um 14:55 Uhr muss das Medikament verabreicht werden.

Erläuterung: *Einsetzen*

Da die Maximalmenge 8 mg beträgt, dürfen erst wieder 5 mg hinzugegeben werden, wenn nur noch 3 mg des Medikaments im Körper sind.

Deshalb wird  $y = 3$  in  $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach  $x$  aufgelöst.

Dann erhält man die Anzahl der Stunden, nach denen das Medikament frühestens verabreicht werden darf.

$$3 = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad : 5,0$$

$$\frac{3}{5} = 10^{-0,07572 \cdot x} \quad | \quad \log_{10}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion  $10^{-0,07572 \cdot x}$  kann durch den Logarithmus  $\log_{10}$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } 2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$$

$$\log_{10} \frac{3}{5} = -0,07572 \cdot x \quad | \quad : (-0,07572)$$

$$x = \frac{\log_{10} \frac{3}{5}}{-0,07572} \approx 2,93$$

Umrechnung in Minuten:

0,93 Stunden sind  $0,93 \cdot 60 \approx 56$  Minuten

$\Rightarrow$  2,93 Stunden sind 2 Stunden und 56 Minuten

Zur Startzeit um 8 Uhr werden nun 2 Stunden und 56 Minuten addiert.

Antwort:

Frühestens um 10:56 Uhr kann das Medikament verabreicht werden.

#### Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Die zweite Verabreichung von 5,0 mg des Medikaments erfolgt um 12:30 Uhr. Berechnen Sie die um 16:00 Uhr im Körper befindliche Masse. (Auf zwei Stellen nach dem Komma.)

#### Lösung zu Aufgabe A1.4

##### *Exponentielles Wachstum*

$$\text{Gegeben: } y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$$

Zuerst wird berechnet, wie groß die im Körper befindliche Masse des Medikaments um 12:30 Uhr ist.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Zeitspanne von 8 bis 12:30 Uhr beträgt 4,5 Stunden.

Deshalb wird  $x = 4,5$  in  $y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  eingesetzt.

$$y = 5,0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot 4,5}$$

$$y \approx 2,28 \text{ mg} \quad (\text{Menge um 12:30 Uhr})$$

Da um 12:30 Uhr wiederum 5,0 mg des Medikaments verabreicht werden, beträgt die neue Startmasse  $y_0 = 7,28$  mg.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Zeitspanne von 12:30 bis 16 Uhr beträgt 3,5 Stunden.

Deshalb wird  $x = 3,5$  und  $y_0 = 7,28$  in  $y = y_0 \cdot 10^{-0,07572 \cdot x}$  eingesetzt.

$$y = 7,28 \cdot 10^{-0,07572 \cdot 3,5}$$

$$y \approx 3,95 \text{ mg} \quad (\text{Menge um 16 Uhr})$$

Antwort:

Um 16 Uhr befinden sich noch 3,95 mg des Medikaments im Körper.

#### Aufgabe A1.5 (2 Punkte)

Ein anderes Medikament wird vom Körper nach 4 Stunden zur Hälfte abgebaut. Berechnen Sie für dieses Medikament den Wert für  $n$  auf fünf Stellen nach dem Komma gerundet.

#### Lösung zu Aufgabe A1.5

##### *Exponentielles Wachstum*

$$\text{Gegeben: } y = y_0 \cdot 10^{n \cdot x}, \quad x = 4$$

Das Medikament wird nach 4 Stunden zur Hälfte abgebaut, d.h. die Ausgangsmasse  $y_0$  wird in dieser Zeit halbiert.

$$\Rightarrow y = 0,5 \cdot y_0$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$y = 0,5 \cdot y_0$  und  $x = 4$  werden in  $y = y_0 \cdot 10^{n-x}$  eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach  $n$  aufgelöst.

$$0,5 \cdot y_0 = y_0 \cdot 10^{n-4} \quad | : y_0$$

$$0,5 = 10^{n-4} \quad | \log_{10}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion  $10^{n-4}$  kann durch den Logarithmus  $\log_{10}$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } 2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$$

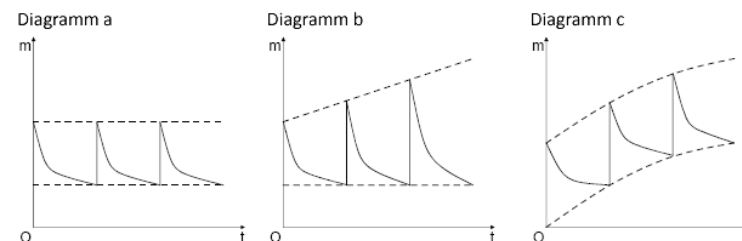
$$\log_{10} 0,5 = n - 4 \quad | : 4$$

$$n = \frac{\log_{10} 0,5}{4} \approx -0,07526$$

#### Aufgabe A1.6 (2 Punkte)

Ein Patient nimmt dreimal hintereinander die gleiche Masse des Medikaments aus 1.5 im Abstand von 6 Stunden ein. Einer der Graphen in den unten stehenden Diagrammen a, b und c stellt die Masse des Medikaments im Körper des Patienten qualitativ in Abhängigkeit von der Zeit dar.

Geben Sie das zugehörige Diagramm an und begründen Sie ihre Auswahl.



#### Lösung zu Aufgabe A1.6

##### **Funktionsgraphen zuordnen**

Lösung: Diagramm c)

Die höchsten Werte sind die Ausgangsmengen vor jeder neuen Verabreichung. Diese Ausgangsmengen steigen an, da nach 6 Stunden immer noch eine gewisse Restmenge vorhanden ist.

Die niedrigsten Werte sind die Restmengen nach jeweils 6 Stunden. Diese Restmengen steigen auch an, da die Restmenge von der Ausgangsmenge abhängig ist.