# Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe B1

**Aufgabe B1.**

Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung $y = \log_3(x+2) - 1$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

**Aufgabe B1.1** (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote zu $f$ an und zeichnen Sie den Graphen zu $f$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 12$; $-3 \leqq y \leqq 6$

**Aufgabe B1.2** (2 Punkte)

Punkte $P_n(x|\log_3(x+2)-1)$ mit $y_P < y_R$ auf dem Graphen zu $f$ und Punkte $Q_n$ bilden zusammen mit dem Punkt $R(6|5)$ Dreiecke $P_n Q_n R$, deren Seiten $[P_n Q_n]$ parallel zur $x$-Achse verlaufen. Die Abszisse der Punkte $Q_n$ ist um vier größer als die Abszisse $x$ der Punkte $P_n$.
Zeichnen Sie die Dreiecke $P_1 Q_1 R$ für $x = -1$ und $P_2 Q_2 R$ für $x = 7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

**Aufgabe B1.3** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt $A$ der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von der Abszisse $x$ der Punkte $P_n$ wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12]$ FE.

**Aufgabe B1.4** (3 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das Dreieck $P_3 Q_3 R$ mit einem Flächeninhalt von $15$ FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_3$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

**Aufgabe B1.5** (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das gleichschenklige Dreieck $P_4 Q_4 R$ mit der Basis $[P_4 Q_4]$ und dem Basismittelpunkt $M$.
Zeichnen Sie das Dreieck $P_4 Q_4 R$ in das Koordinatensystem zu 1.1 und berechnen Sie das Maß $\varphi$ des Winkels $P_4 R Q_4$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)





# Lösung

## Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion $f$ mit der Gleichung $y = \log_3(x+2) - 1$ $(G = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

## Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge, die Wertemenge sowie die Gleichung der Asymptote zu $f$ an und zeichnen Sie den Graphen zu $f$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 12$; $-3 \leqq y \leqq 6$

### Lösung zu Aufgabe B1.1

***Definitionsmenge einer Funktion***

$f: y = \log_3(x+2) - 1$

Definitionsmenge bestimmen:

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> Die Logarithmusfunktion $\log_3(x+2)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche $x$-Werte gilt: $x + 2 > 0$.

$x + 2 > 0 \quad | \quad -2$

$x > -2$

$\Rightarrow \quad D_f = ]-2; \infty[$

***Wertemenge einer Funktion***

Die Wertemenge jeder Logarithmusfunktion besteht aus allen reellen Zahlen.

$\Rightarrow \quad W_f = \mathbb{R}$

***Asymptoten einer Funktion***

$D_f = ]-2; \infty[$

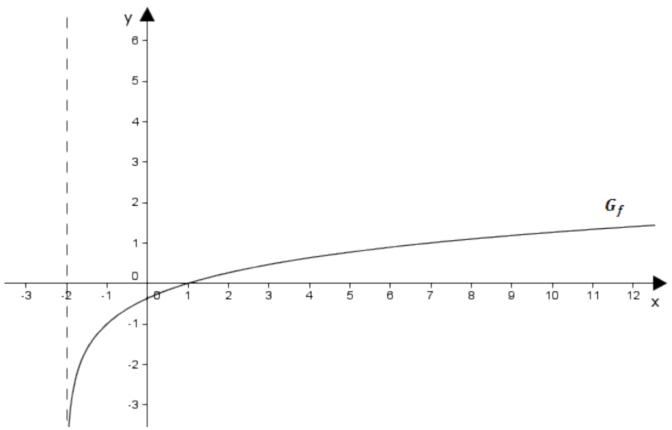
$\Rightarrow \quad x = -2 \quad$ (senkrechte Asymptote)

***Skizze***

Wertetabelle:

| x | −2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | n. d. | −0,37 | 0 | 0,26 | 0,63 | 0,89 | 1,1 | 1,26 | 1,4 |

Graph $G_f$ einzeichnen:




**Aufgabe B1.2** (2 Punkte)

Punkte $P_n(x|\log_3(x+2)-1)$ mit $y_P < y_R$ auf dem Graphen zu $f$ und Punkte $Q_n$ bilden zusammen mit dem Punkt $R(6|5)$ Dreiecke $P_n\,Q_n\,R$, deren Seiten $[P_n\,Q_n]$ parallel





zur $x$-Achse verlaufen. Die Abszisse der Punkte $Q_n$ ist um vier größer als die Abszisse $x$ der Punkte $P_n$.
Zeichnen Sie die Dreiecke $P_1\,Q_1\,R$ für $x=-1$ und $P_2\,Q_2\,R$ für $x=7$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

**Lösung zu Aufgabe B1.2**

***Skizze***

Gegeben: $\quad P_n(x|\log_3(x+2)-1)$

Berechnung der Koordinaten von $P_1$ und $P_2$:

Erläuterung: *Einsetzen*

$x=-1$ und $x=7$ werden in $P_n(x|\log_3(x+2)-1)$ eingesetzt.

$\Rightarrow \quad P_1(-1|-1)$

$\Rightarrow \quad P_2(7|1)$

Berechnung der Koordinaten von $Q_1$ und $Q_2$:

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

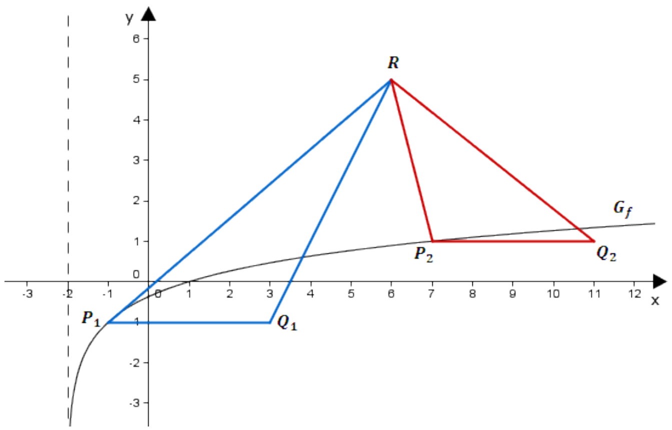
Die Abszisse ($x$-Wert) der Punkte $Q_n$ ist um 4 größer als die Abszisse der Punkte $P_n$.

Die $y$-Werte der Punkte $Q_n$ und $P_n$ sind gleich, da die Seiten $[P_n\,Q_n]$ parallel zur $x$-Achse verlaufen.

$\Rightarrow \quad Q_1(-1+4|-1) \quad \Rightarrow \quad Q_1(3|-1)$

$\Rightarrow \quad Q_2(7+4|1) \quad \Rightarrow \quad Q_2(11|1)$

Die berechneten Punkte werden jeweils mit $R(6|5)$ zu den Dreiecken $P_1\,Q_1\,R$ und $P_2\,Q_2\,R$ verbunden.




**Aufgabe B1.3** (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt $A$ der Dreiecke $P_n Q_n R$ in Abhängigkeit von der Abszisse $x$ der Punkte $P_n$ wie folgt darstellen lässt:
$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12]$ FE.

**Lösung zu Aufgabe B1.3**

***Flächeninhalt eines Dreiecks***

Gegeben:

$P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$

Punkte $Q_n$ haben $x+4$ als $x$-Wert und den gleichen $y$-Wert wie Punkte $P_n$.

$R(6|5)$

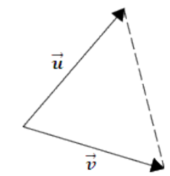




Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$




$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_{\overrightarrow{P_n Q_n}} & x_{\overrightarrow{P_n R}} \\ y_{\overrightarrow{P_n Q_n}} & y_{\overrightarrow{P_n R}} \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x+4-x & 6-x \\ 0 & 5-(\log_3(x+2)-1) \end{vmatrix}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6-x \\ 0 & 6-\log_3(x+2) \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot [4 \cdot (6 - \log_3(x+2) - 0 \cdot (6-x)]$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (24 - 4\log_3(x+2))$$

$\Rightarrow \quad A(x) = [12 - 2\log_3(x+2)]$FE

**Aufgabe B1.4** (3 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das Dreieck $P_3 Q_3 R$ mit einem Flächeninhalt von 15 FE.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $P_3$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

**Lösung zu Aufgabe B1.4**

***Koordinaten von Punkten ermitteln***

Gegeben:

$A = 15$ FE

$A(x) = [-2 \cdot \log_3(x+2) + 12]$ FE (aus Teilaufgabe 1.3)

Erläuterung: *Einsetzen*

15 wird für $A(x)$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach $x$ aufgelöst.

$15 = -2 \cdot \log_3(x+2) + 12 \quad | \quad -12$

$3 = -2 \cdot \log_3(x+2) \quad | \quad :(-2)$

$-1,5 = \log_3(x+2)$

Erläuterung: *Logarithmus*

$\log_a b = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b$

Beispiel: $\log_2 x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^3 = x$

$x + 2 = 3^{-1,5} \quad | \quad -2$

$x = 3^{-1,5} - 2 \approx -1,81$ (x-Wert von $P_3$)

Erläuterung: *Einsetzen*

Den $y$-Wert von $P_3$ erhält man durch Einsetzen von $x = -1,81$ in $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ (gegeben aus der Angabe zu 1.2).





$P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$

$P_3(-1,81|\log_3(-1,81+2) - 1)$

$\Rightarrow \quad P_3(-1,81| - 2,51)$

**Aufgabe B1.5** (4 Punkte)

Unter den Dreiecken $P_n Q_n R$ gibt es das gleichschenklige Dreieck $P_4 Q_4 R$ mit der Basis $[P_4 Q_4]$ und dem Basismittelpunkt $M$.
Zeichnen Sie das Dreieck $P_4 Q_4 R$ in das Koordinatensystem zu 1.1 und berechnen Sie das Maß $\varphi$ des Winkels $P_4 R Q_4$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

**Lösung zu Aufgabe B1.5**

***Skizze***

Gegeben: $\overline{P_4 Q_4} = 4\,\text{LE}$

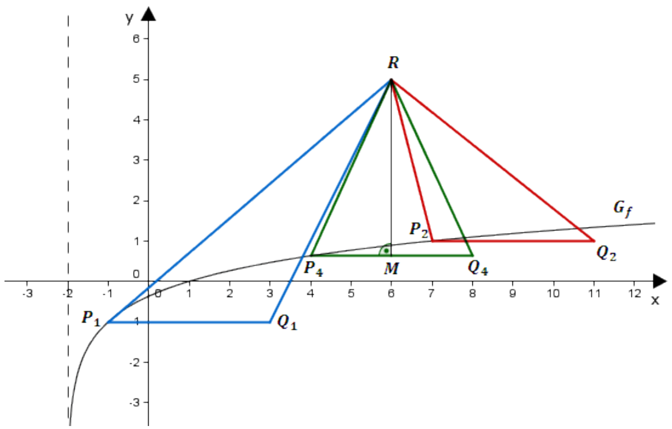
Im gleichschenkligen Dreieck $P_4 Q_4 R$ ist die Höhe $[R M]$ auch Seitenhalbierende der Basis $[P_4 Q_4]$.

$\Rightarrow \quad \overline{P_4 M} = \overline{M Q_4} = 2\,\text{LE}$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird die Höhe $[R M]$ senkrecht nach unten eingezeichnet, ohne die Lage von $M$ genau zu bestimmen.

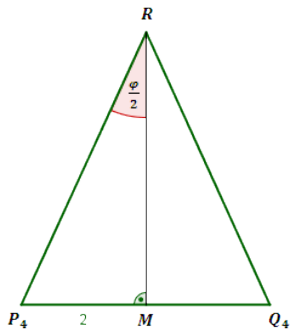
Die Basis $[P_4 Q_4]$ wird dort parallel zur $x$-Achse eingezeichnet, wo der Abstand von der Höhe zum Graphen $G_f$ genau 2 beträgt.




***Winkel bestimmen***

Im gleichschenkligen Dreieck $P_4\,Q_4\,R$ ist die Höhe $[R\,M]$ auch Winkelhalbierende von $\varphi$.

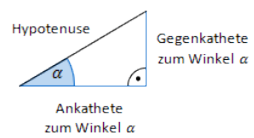
Deshalb betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $P_4\,M\,R$ und versucht zuerst den Winkel $P_4\,R\,M = \dfrac{\varphi}{2}$ zu berechnen.








Erläuterung: *Tangens eines Winkels*




Der Tangens eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{P_4\,M}}{\overline{R\,M}}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\overline{R\,M}}$$

Nun muss noch $\overline{R\,M}$ berechnet werden.

$\overline{R\,M} = y_R - y_M = 5 - y_M$ $\quad(R(6|5)$ gegeben aus Angabe)

Wir wissen: $x_M = 6\,(= x_R)$

$\Rightarrow \quad x_{P_4} = 6 - 2 = 4 \quad | \quad$ in $P_n(x|\log_3(x+2) - 1)$ einsetzen

$\Rightarrow \quad y_{P_4} = \log_3(4+2) - 1 = 0{,}63$

$\Rightarrow \quad y_M = y_{P_4} = 0{,}63$

Also: $\quad \overline{R\,M} = 5 - y_M = 5 - 0{,}63$

$\Rightarrow \quad \tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2}{5 - 0{,}63} \quad | \quad \tan^{-1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\varphi}{2} \approx 24{,}59^\circ \quad | \quad \cdot 2$

$\Rightarrow \quad \varphi = 49{,}18^\circ$