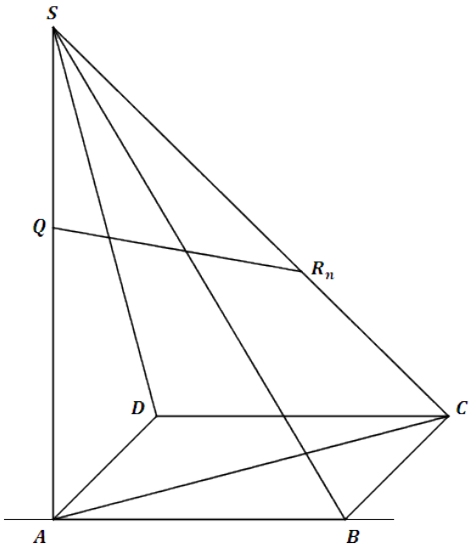
Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe P2

Aufgabe P2.

Das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt A. Der Winkel SCA hat das Maß $\gamma = 50°$.
Der Punkt Q liegt auf der Kante $[AS]$ mit $\overline{AQ} = 6\,\text{cm}$. Die Punkte R_n liegen auf der Kante $[CS]$, wobei die Winkel R_nQS das Maß ε mit $\varepsilon > 0°$ haben.



Aufgabe P2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das größtmögliche Winkelmaß ε.

Aufgabe P2.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{QR_n}$ in Abhängigkeit von ε gilt:
$\overline{QR_n}(\varepsilon) = \dfrac{2,64}{\sin(40° + \varepsilon)}\,\text{cm}$.
[Teilergebnis: $\overline{AS} = 10,11\,\text{cm}$]

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

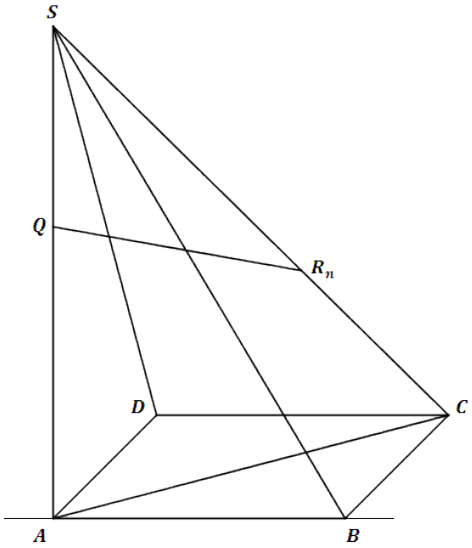
Berechnen Sie das Winkelmaß ε, sodass die Strecken $[QR_1]$ und $[QS]$ gleich lang sind.

© Realschulrep.de

Lösung

Aufgabe P2.

Das Quadrat $A\,B\,C\,D$ mit $\overline{A\,B} = 6\,\text{cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt A. Der Winkel $S\,C\,A$ hat das Maß $\gamma = 50°$.
Der Punkt Q liegt auf der Kante $[A\,S]$ mit $\overline{A\,Q} = 6\,\text{cm}$. Die Punkte R_n liegen auf der Kante $[C\,S]$, wobei die Winkel $R_n\,Q\,S$ das Maß ε mit $\varepsilon > 0°$ haben.



Aufgabe P2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das größtmögliche Winkelmaß ε.

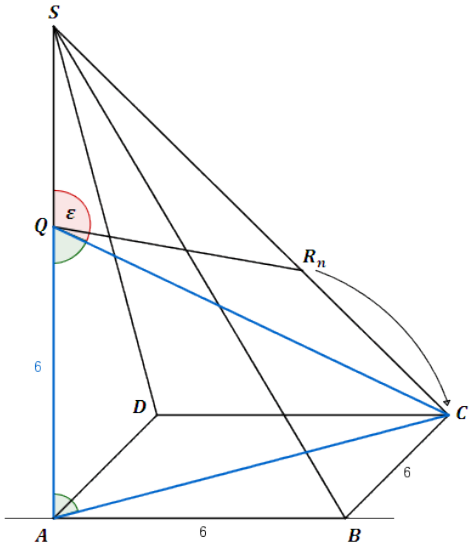
Lösung zu Aufgabe P2.1

Winkel bestimmen

Gegeben:

$\overline{A\,B} = \overline{B\,C} = 6\,\text{cm}, \quad \overline{A\,Q} = 6\,\text{cm}$

Der Winkel ε wird dann am größten, wenn der Punkt R_n auf C liegt.



Nun betrachtet man das rechtwinklige Dreieck $A\,C\,Q$. Der Winkel $A\,Q\,C$ ist Nebenwinkel des größtmöglichen Winkels ε.

Der Winkel $A\,Q\,C$ lässt sich in diesem Dreieck jedoch erst berechnen, wenn $\overline{A\,C}$ bekannt ist.

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Die Strecken $[A\,B]$ und $[B\,C]$ sind hier die Katheten, $[A\,C]$ ist die Hypothenuse.

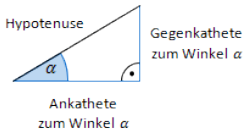
$\overline{A\,C}^2 = \overline{A\,B}^2 + \overline{B\,C}^2$

© Realschulrep.de

$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\Rightarrow \quad \overline{AC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\sphericalangle AQC = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2} \quad | \quad \tan^{-1}$

$\sphericalangle AQC \approx 54,74°$

$\Rightarrow \quad \varepsilon = 180° - 54,74° = 125,26°$

Aufgabe P2.2 (4 Punkte)

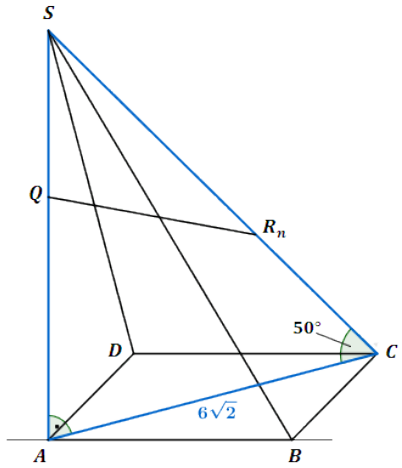
Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{QR_n}$ in Abhängigkeit von ε gilt:
$\overline{QR_n}(\varepsilon) = \dfrac{2,64}{\sin(40° + \varepsilon)}\,\text{cm}$.
[Teilergebnis: $\overline{AS} = 10,11\,\text{cm}$]

Lösung zu Aufgabe P2.2

Länge einer Strecke

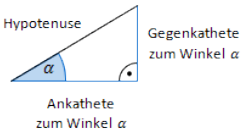
Gegeben: $\sphericalangle SCA = \gamma = 50°$, $\overline{AC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$ (aus Teilaufgabe 2.1)

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck ACS.



Hier kann $\overline{AS}$ berechnet werden.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\gamma = \dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot\overline{AC}$

$\overline{AS} = \overline{AC} \cdot \tan\gamma$

$\overline{AS} = 6\sqrt{2} \cdot \tan 50°$

© Realschulrep.de

$\Rightarrow \quad \overline{AS} \approx 10,11\,\text{cm}$

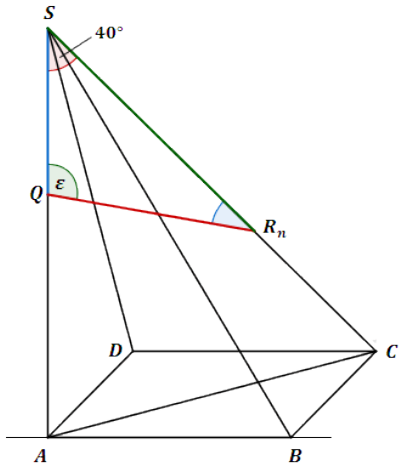
Außerdem kann im Dreieck ACS der Winkel ASC berechnet werden.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

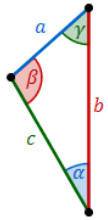
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\measuredangle ASC = 180° - 90° - 50° = 40°$

Da $\overline{QR_n}$ berechnet werden soll, wird im Dreieck SQR_n der Sinussatz verwendet.



Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{QR_n}}{\sin\measuredangle ASC} = \frac{\overline{QS}}{\sin\measuredangle SR_nQ}$$

$$\frac{\overline{QR_n}}{\sin 40°} = \frac{\overline{QS}}{\sin(180° - (\varepsilon + 40°))} \quad | \quad \cdot\sin 40°$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$\sin x = \sin(180° - x)$

$$\overline{QR_n} = \frac{\sin 40° \cdot 4,11}{\sin(\varepsilon + 40°)} \qquad (\overline{QS} = \overline{AS} - \overline{AQ} = 10,11 - 6 = 4,11)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{QR_n}(\varepsilon) = \frac{2,64}{\sin(40° + \varepsilon)}\,\text{cm}$$

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Winkelmaß ε, sodass die Strecken $[QR_1]$ und $[QS]$ gleich lang sind.

© Realschulrep.de

Lösung zu Aufgabe P2.3

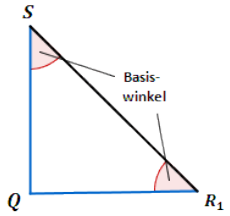
Winkel bestimmen

Gegeben aus Aufgabe 2.2: $\measuredangle A\,S\,C = \measuredangle Q\,S\,R_1 = 40^\circ$

Wenn $[Q\,R_1]$ und $[Q\,S]$ gleich lang sind, so sind diese Strecken die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks $Q\,R_1\,S$.

Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Basiswinkel gleich groß.



Somit gilt: $\measuredangle Q\,S\,R_1 = \measuredangle S\,R_1\,Q = 40^\circ$

Erläuterung:

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180°.

$\Rightarrow \quad \varepsilon = 180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$