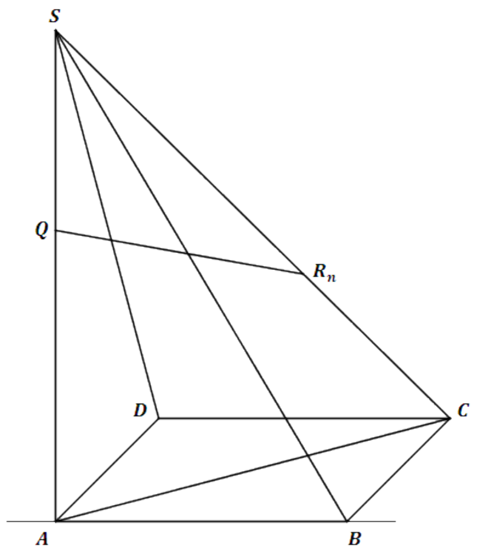
Mittlere-Reife-Prüfung 2006 Mathematik I Aufgabe P2

Aufgabe P2.

Das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt A. Der Winkel SCA hat das Maß $\gamma = 50°$.
Der Punkt Q liegt auf der Kante $[AS]$ mit $\overline{AQ} = 6\,\text{cm}$. Die Punkte R_n liegen auf der Kante $[CS]$, wobei die Winkel R_nQS das Maß ε mit $\varepsilon > 0°$ haben.



Aufgabe P2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das größtmögliche Winkelmaß ε.

Aufgabe P2.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{QR_n}$ in Abhängigkeit von ε gilt:
$\overline{QR_n}(\varepsilon) = \dfrac{2,64}{\sin(40° + \varepsilon)}\,\text{cm}$.
[Teilergebnis: $\overline{AS} = 10,11\,\text{cm}$]

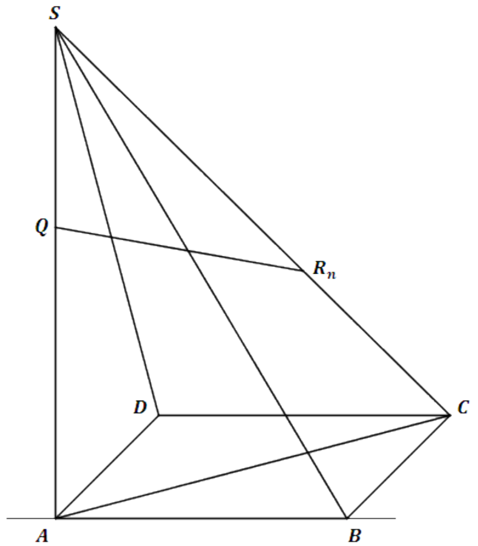
Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Winkelmaß ε, sodass die Strecken $[QR_1]$ und $[QS]$ gleich lang sind.

Lösung

Aufgabe P2.

Das Quadrat $ABCD$ mit $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt A. Der Winkel SCA hat das Maß $\gamma = 50°$.
Der Punkt Q liegt auf der Kante $[AS]$ mit $\overline{AQ} = 6\,\text{cm}$. Die Punkte R_n liegen auf der Kante $[CS]$, wobei die Winkel R_nQS das Maß ε mit $\varepsilon > 0°$ haben.



Aufgabe P2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das größtmögliche Winkelmaß ε.

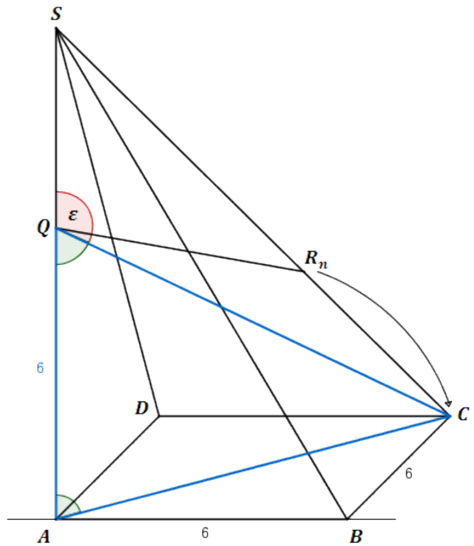
Lösung zu Aufgabe P2.1

Winkel bestimmen

Gegeben:

$\overline{AB} = \overline{BC} = 6\,\text{cm}, \qquad \overline{AQ} = 6\,\text{cm}$

Der Winkel ε wird dann am größten, wenn der Punkt R_n auf C liegt.



Nun betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ACQ. Der Winkel AQC ist Nebenwinkel des größtmöglichen Winkels ε.

Der Winkel AQC lässt sich in diesem Dreieck jedoch erst berechnen, wenn $\overline{AC}$ bekannt ist.

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

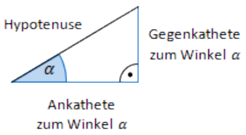
> In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$
>
> Die Strecken $[AB]$ und $[BC]$ sind hier die Katheten, $[AC]$ ist die Hypothenuse.

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \quad | \quad \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad \overline{AC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\measuredangle AQC = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2} \quad | \quad \tan^{-1}$

$\measuredangle AQC \approx 54{,}74^\circ$

$\Rightarrow \quad \varepsilon = 180^\circ - 54{,}74^\circ = 125{,}26^\circ$

Aufgabe P2.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Streckenlängen $\overline{QR_n}$ in Abhängigkeit von ε gilt:

$\overline{QR_n}(\varepsilon) = \dfrac{2{,}64}{\sin(40^\circ + \varepsilon)}\,\text{cm}.$

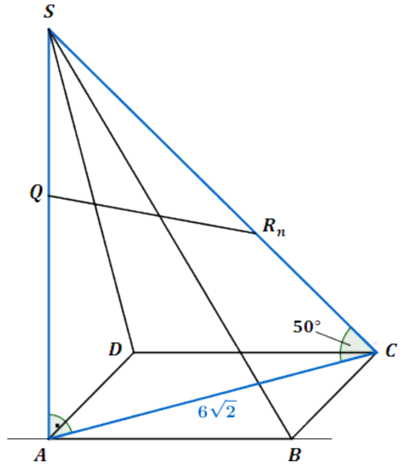
[Teilergebnis: $\overline{AS} = 10{,}11\,\text{cm}$]

Lösung zu Aufgabe P2.2

Länge einer Strecke

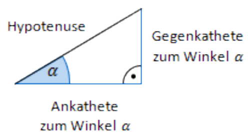
Gegeben: $\measuredangle SCA = \gamma = 50^\circ$, $\overline{AC} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$ (aus Teilaufgabe 2.1)

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck ACS.



Hier kann $\overline{AS}$ berechnet werden.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$\tan\alpha = \dfrac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\gamma = \dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot\overline{AC}$

$\overline{AS} = \overline{AC} \cdot \tan\gamma$

$\overline{AS} = 6\sqrt{2} \cdot \tan 50^\circ$

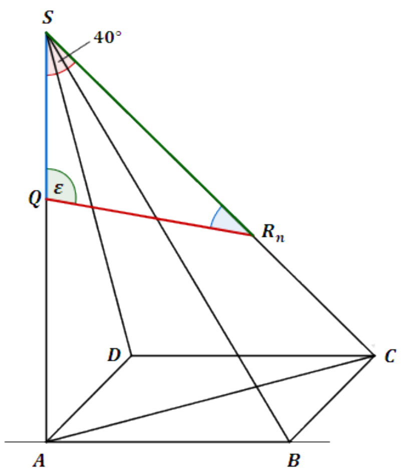
$\Rightarrow \quad \overline{AS} \approx 10,11\,\text{cm}$

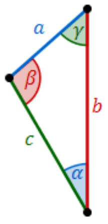
Außerdem kann im Dreieck ACS der Winkel ASC berechnet werden.

> Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*
>
> Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\measuredangle ASC = 180° - 90° - 50° = 40°$

Da $\overline{QR_n}$ berechnet werden soll, wird im Dreieck SQR_n der Sinussatz verwendet.



> Erläuterung: *Sinussatz*
>
> 
>
>
> In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:
>
> $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
>
> Anders formuliert:
>
> $$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{QR_n}}{\sin\measuredangle ASC} = \frac{\overline{QS}}{\sin\measuredangle SR_nQ}$$

$$\frac{\overline{QR_n}}{\sin 40°} = \frac{\overline{QS}}{\sin(180° - (\varepsilon + 40°))} \qquad | \quad \cdot \sin 40°$$

> Erläuterung: *Sinus eines Winkels*
>
> $\sin x = \sin(180° - x)$

$$\overline{QR_n} = \frac{\sin 40° \cdot 4,11}{\sin(\varepsilon + 40°)} \qquad (\overline{QS} = \overline{AS} - \overline{AQ} = 10,11 - 6 = 4,11)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{QR_n}(\varepsilon) = \frac{2,64}{\sin(40° + \varepsilon)}\,\text{cm}$$

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Winkelmaß ε, sodass die Strecken $[QR_1]$ und $[QS]$ gleich lang sind.

Lösung zu Aufgabe P2.3

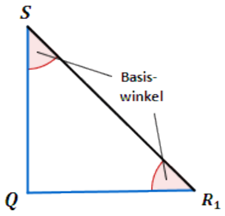
Winkel bestimmen

Gegeben aus Aufgabe 2.2: $\measuredangle A\,S\,C = \measuredangle Q\,S\,R_1 = 40°$

Wenn $[Q\,R_1]$ und $[Q\,S]$ gleich lang sind, so sind diese Strecken die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks $Q\,R_1\,S$.

Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

In einem gleichschenkligen Dreieck sind die beiden Basiswinkel gleich groß.



Somit gilt: $\measuredangle Q\,S\,R_1 = \measuredangle S\,R_1\,Q = 40°$

Erläuterung:

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\Rightarrow \quad \varepsilon = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$