

## Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe A1

### Aufgabe A1.

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu prüfen, wird ein bestimmter Farbstoff verabreicht und dessen Ausscheiden gemessen. Werden einem Menschen  $a$  g (Gramm) Farbstoff verabreicht, so sind nach  $x$  min noch  $y$  g des Farbstoffs in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden. Die Abnahme des Farbstoffs kann mit der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$  mit  $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ ;  $p \in ]0; 100[$ ;  $p \in \mathbb{R}$ ;  $a \in \mathbb{R}^+$  beschrieben werden, wobei  $p\%$  die Ausscheidungsrate pro Minute ist.

#### Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Um die minütliche Ausscheidungsrate  $p\%$  zu ermitteln, werden einem gesunden Menschen 0,50 g Farbstoff verabreicht. Nach 40 Minuten hat seine Bauchspeicheldrüse 0,40 g des Farbstoffs ausgeschieden.

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der zugehörigen Funktion  $f_1$ , welche den Ausscheidungsvorgang der Bauchspeicheldrüse eines gesunden Menschen bei einer Verabreichung von 0,50 g Farbstoff beschreibt.

[Teilergebnis:  $p = 4$  (auf Ganze gerundet)]

#### Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f_1$  für  $x \in [0; 80]$  in Schritten von  $\Delta x = 10$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f_1$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 10 min;  $0 \leq x \leq 90$

Auf der y-Achse: 1 cm für 0,1 g;  $0 \leq y \leq 0,6$

#### Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Um die in 1.1 ermittelte Ausscheidungsrate von 4% zu überprüfen, werden einem weiteren gesunden Menschen 0,80 g des Farbstoffes verabreicht.

Welche Masse an Farbstoff sollte nach 50 Minuten ausgeschieden sein?

#### Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Zeit auf ganze Minuten gerundet, nach der 75% des verabreichten Farbstoffs bei einem gesunden Menschen ausgeschieden sein sollen. (Ausscheidungsrate: 4%)

### Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Einem Menschen werden 0,30 g des Farbstoffs verabreicht. Nach Ablauf von 25 Minuten sind in seiner Bauchspeicheldrüse noch 0,18 g des Farbstoffs vorhanden.

Geben Sie für diesen Fall die Gleichung der Funktion  $f_2$  an und zeichnen Sie ihren Graphen in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

[Teilergebnis:  $p = 2$  (auf Ganze gerundet)]

### Aufgabe A1.6 (4 Punkte)

0,50 g des Farbstoffs werden der Person aus 1.1 und gleichzeitig 0,30 g der Person aus 1.5 verabreicht.

Berechnen Sie, nach welcher Zeit auf ganze Minuten gerundet die Personen aus 1.1 und 1.5 die gleiche Masse Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben.

## Lösung

## Aufgabe A1.

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu prüfen, wird ein bestimmter Farbstoff verabreicht und dessen Ausscheiden gemessen. Werden einem Menschen  $a$  g (Gramm) Farbstoff verabreicht, so sind nach  $x$  min noch  $y$  g des Farbstoffs in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden. Die Abnahme des Farbstoffs kann mit der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$  mit  $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ ;  $p \in ]0; 100[$ ;  $p \in \mathbb{R}$ ;  $a \in \mathbb{R}^+$  beschrieben werden, wobei  $p\%$  die Ausscheidungsrate pro Minute ist.

## Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Um die minutliche Ausscheidungsrate  $p\%$  zu ermitteln, werden einem gesunden Menschen 0,50 g Farbstoff verabreicht. Nach 40 Minuten hat seine Bauchspeicheldrüse 0,40 g des Farbstoffs ausgeschieden.

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der zugehörigen Funktion  $f_1$ , welche den Ausscheidungsvorgang der Bauchspeicheldrüse eines gesunden Menschen bei einer Verabreichung von 0,50 g Farbstoff beschreibt.

[Teilergebnis:  $p = 4$  (auf Ganze gerundet)]

## Lösung zu Aufgabe A1.1

## Exponentielles Wachstum

Gegeben ist die verabreichte Menge Farbstoff  $a = 0,50$  g, die vergangene Zeit  $x = 40$  min und die verbliebene Menge Farbstoff  $y = 0,50$  g  $-0,40$  g =  $0,10$  g.

Gesucht ist die minutliche Ausscheidungsrate  $p$ .

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte für  $a$ ,  $x$  und  $y$  werden in die Gleichung  $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$  eingesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach  $p$  aufgelöst.

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$$

$$0,10 = 0,50 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{40} \quad | \quad : 0,50$$

$$0,20 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{40} \quad | \quad \sqrt[40]{\phantom{x}}$$

$$\sqrt[40]{0,20} = 1 - \frac{p}{100} \quad | \quad -1$$

$$\sqrt[40]{0,20} - 1 = -\frac{p}{100} \quad | \quad \cdot (-100)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$-100 \cdot \left(\sqrt[40]{0,20} - 1\right) = p$$

$$100 \cdot (-1) \cdot \left(\sqrt[40]{0,20} - 1\right) = p$$

$$100 \cdot \left(-\sqrt[40]{0,20} + 1\right) = p$$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[40]{0,20}\right)$$

$$p \approx 4$$

$$\Rightarrow f_1 : y = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

## Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion  $f_1$  für  $x \in [0; 80]$  in Schritten von  $\Delta x = 10$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f_1$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 10 min ;  $0 \leq x \leq 90$

Auf der y-Achse: 1 cm für 0,1 g ;  $0 \leq y \leq 0,6$

## Lösung zu Aufgabe A1.2

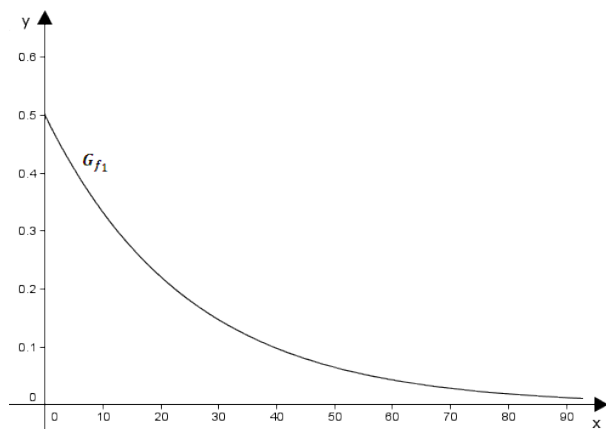
## Wertetabelle

$$f_1 : y = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

Wertetabelle für  $x \in [0; 80]$  erstellen (Taschenrechner verwenden!):

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$f_1(x)$	0.5	0.33	0.22	0.15	0.1	0.06	0.04	0.03	0.02

Skizze



#### Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Um die in 1.1 ermittelte Ausscheidungsrate von 4% zu überprüfen, werden einem weiteren gesunden Menschen 0,80 g des Farbstoffes verabreicht.

Welche Masse an Farbstoff sollte nach 50 Minuten ausgeschieden sein?

#### Lösung zu Aufgabe A1.3

##### **Exponentielles Wachstum**

Gegeben ist die verabreichte Menge Farbstoff  $a = 0,80$  g und die vergangene Zeit  $x = 50$  min.

Gesucht ist die verbleibende Masse  $y$ , über die dann die ausgeschiedene Masse berechnet werden kann.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte für  $a$  und  $x$  werden in die Gleichung  $y = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$  eingesetzt.

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

$$y = 0,80 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^{50}$$

$$y \approx 0,10$$

Ausgeschiedene Menge:  $0,80 \text{ g} - 0,10 \text{ g} = 0,70 \text{ g}$

Antwort:

Nach 50 Minuten sind 0,7 g des Farbstoffes ausgeschieden.

#### Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Zeit auf ganze Minuten gerundet, nach der 75% des verabreichten Farbstoffes bei einem gesunden Menschen ausgeschieden sein sollen. (Ausscheidungsrate: 4%)

#### Lösung zu Aufgabe A1.4

##### **Exponentielles Wachstum**

Gegeben ist die Ausscheidungsrate  $p = 4\%$  und der verbliebene Farbstoff  $y = 100\% - 75\% = 25\% = 0,25$ .

Gesucht ist die Zeit  $x$ .

Erläuterung: *Einsetzen*

Man lässt für die verabreichte Menge Farbstoff die Variable  $a$  stehen. Für den verbliebenen Farbstoff setzt man  $y = 0,25 \cdot a$  in die Gleichung ein. Anschließend wird die Gleichung nach  $x$  aufgelöst.

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

$$0,25 \cdot a = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x \quad | : a$$

$$0,25 = 0,96^x \quad | \log_{0,96}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion  $0,96^x$  kann durch den Logarithmus  $\log_{0,96}$  aufgehoben werden.

Beispiel:

$$2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$$

$$\log_{0,96} 0,25 = x$$

$$x \approx 34$$

Antwort:

Nach 34 Minuten sollten beim gesunden Menschen 75% des verabreichten Farbstoffs ausgeschieden sein.

#### Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Einem Menschen werden 0,30 g des Farbstoffs verabreicht. Nach Ablauf von 25 Minuten sind in seiner Bauchspeicheldrüse noch 0,18 g des Farbstoffs vorhanden.

Geben Sie für diesen Fall die Gleichung der Funktion  $f_2$  an und zeichnen Sie ihren Graphen in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

[Teilergebnis:  $p = 2$  (auf Ganze gerundet)]

#### Lösung zu Aufgabe A1.5

##### Exponentielles Wachstum

Gegeben:  $a = 0,30$  g,  $x = 25$  min,  $y = 0,18$  g

Gesucht:  $p$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte  $a$ ,  $x$  und  $y$  werden in die Gleichung  $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$  eingesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach  $p$  aufgelöst.

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$$

$$0,18 = 0,30 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{25} \quad | : 0,30$$

$$0,60 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{25} \quad | \sqrt[25]{\quad}$$

$$\sqrt[25]{0,60} = 1 - \frac{p}{100} \quad | -1$$

$$\sqrt[25]{0,60} - 1 = -\frac{p}{100} \quad | \cdot (-100)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$-100 \cdot \left(\sqrt[25]{0,60} - 1\right) = p$$

$$100 \cdot (-1) \cdot \left(\sqrt[25]{0,60} - 1\right) = p$$

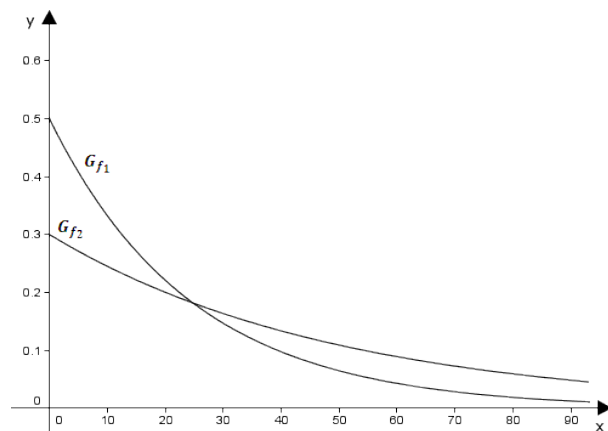
$$100 \cdot \left(-\sqrt[25]{0,60} + 1\right) = p$$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[25]{0,60}\right)$$

$$p \approx 2$$

$$\Rightarrow f_2 : y = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^x$$

Skizze

**Aufgabe A1.6** (4 Punkte)

0,50 g des Farbstoffs werden der Person aus 1.1 und gleichzeitig 0,30 g der Person aus 1.5 verabreicht.

Berechnen Sie, nach welcher Zeit auf ganze Minuten gerundet die Personen aus 1.1 und 1.5 die gleiche Masse Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben.

**Lösung zu Aufgabe A1.6****Exponentielles Wachstum**

Gegeben:  $f_1$  gilt für Person aus 1.1,  $f_2$  gilt für Person aus 1.5

$$f_1 : y = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x \quad f_2 : y = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^x$$

Gesucht: Zeit  $x$ , nach der die Personen die gleiche Menge Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben.

**Erläuterung: Gleichsetzen**

Wenn beide Personen die gleiche Menge Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben, gilt:

$y$  aus  $f_1 = y$  aus  $f_2$ , d.h. die beiden Gleichungen werden gleichgesetzt. Anschließend wird nach  $x$  aufgelöst.

$$0,5 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{4}{100}\right)^x}_{0,96} = 0,3 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{100}\right)^x}_{0,98}$$

$$0,5 \cdot 0,96^x = 0,3 \cdot 0,98^x \quad | : (0,96^x \cdot 0,3)$$

$$\frac{0,5}{0,3} = \frac{0,98^x}{0,96^x}$$

**Erläuterung: Potenzregeln**

$\frac{0,98^x}{0,96^x}$  kann mit Hilfe der Potenzregel  $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$  umgewandelt werden.

$$\frac{0,5}{0,3} = \left(\frac{0,98}{0,96}\right)^x \quad | \log_{\frac{0,98}{0,96}}$$

**Erläuterung: Logarithmieren**

Die Exponentialfunktion  $\left(\frac{0,98}{0,96}\right)^x$  kann durch den Logarithmus  $\log_{\frac{0,98}{0,96}}$  aufgehoben werden.

Beispiel:

$$2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$$

$$x = \log_{\frac{0,98}{0,96}} \frac{0,5}{0,3}$$

$$x \approx 25$$

Antwort:

Nach 25 Minuten haben die beiden Personen die gleiche Menge Farbstoff in ihrer Bauchspeicheldrüse.