Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu prüfen, wird ein bestimmter Farbstoff verabreicht und dessen Ausscheiden gemessen. Werden einem Menschen a g (Gramm) Farbstoff verabreicht, so sind nach x min noch y g des Farbstoffs in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden. Die Abnahme des Farbstoffs kann mit der Funktion f mit der Gleichung $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ mit $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$; $p \in]0;100[$; $p \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden, wobei $p\%$ die Ausscheidungsrate pro Minute ist.

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Um die minütliche Ausscheidungsrate $p\%$ zu ermitteln, werden einem gesunden Menschen $0,50$ g Farbstoff verabreicht. Nach 40 Minuten hat seine Bauchspeicheldrüse $0,40$ g des Farbstoffs ausgeschieden.
Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der zugehörigen Funktion f_1, welche den Ausscheidungsvorgang der Bauchspeicheldrüse eines gesunden Menschen bei einer Verabreichung von $0,50$ g Farbstoff beschreibt.
[Teilergebnis: $p = 4$ (auf Ganze gerundet)]

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f_1 für $x \in [0;80]$ in Schritten von $\Delta x = 10$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 10 min ; $0 \leqq x \leqq 90$
Auf der y-Achse: 1 cm für 0,1 g ; $0 \leqq y \leqq 0,6$

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Um die in 1.1 ermittelte Ausscheidungsrate von 4% zu überprüfen, werden einem weiteren gesunden Menschen $0,80$ g des Farbstoffes verabreicht.
Welche Masse an Farbstoff sollte nach 50 Minuten ausgeschieden sein?

Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Zeit auf ganze Minuten gerundet, nach der 75% des verabreichten Farbstoffs bei einem gesunden Menschen ausgeschieden sein sollen. (Ausscheidungsrate: 4%)

Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Einem Menschen werden $0,30$ g des Farbstoffs verabreicht. Nach Ablauf von 25 Minuten sind in seiner Bauchspeicheldrüse noch $0,18$ g des Farbstoffs vorhanden.
Geben Sie für diesen Fall die Gleichung der Funktion f_2 an und zeichnen Sie ihren Graphen in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
[Teilergebnis: $p = 2$ (auf Ganze gerundet)]

Aufgabe A1.6 (4 Punkte)

$0,50$ g des Farbstoffs werden der Person aus 1.1 und gleichzeitig $0,30$ g der Person aus 1.5 verabreicht.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit auf ganze Minuten gerundet die Personen aus 1.1 und 1.5 die gleiche Masse Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben.

© Realschulrep.de

Lösung

Aufgabe A1.

Um die Funktion der Bauchspeicheldrüse zu prüfen, wird ein bestimmter Farbstoff verabreicht und dessen Ausscheiden gemessen. Werden einem Menschen a g (Gramm) Farbstoff verabreicht, so sind nach x min noch y g des Farbstoffs in seiner Bauchspeicheldrüse vorhanden. Die Abnahme des Farbstoffs kann mit der Funktion f mit der Gleichung $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ mit $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$; $p \in]0;100[$; $p \in \mathbb{R}$; $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden, wobei $p\%$ die Ausscheidungsrate pro Minute ist.

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Um die minütliche Ausscheidungsrate $p\%$ zu ermitteln, werden einem gesunden Menschen $0,50$ g Farbstoff verabreicht. Nach 40 Minuten hat seine Bauchspeicheldrüse $0,40$ g des Farbstoffs ausgeschieden.
Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der zugehörigen Funktion f_1, welche den Ausscheidungsvorgang der Bauchspeicheldrüse eines gesunden Menschen bei einer Verabreichung von $0,50$ g Farbstoff beschreibt.
[Teilergebnis: $p = 4$ (auf Ganze gerundet)]

Lösung zu Aufgabe A1.1

Exponentielles Wachstum

Gegeben ist die verabreichte Menge Farbstoff $a = 0,50$ g, die vergangene Zeit $x = 40$ min und die verbliebene Menge Farbstoff $y = 0,50$ g $-0,40$ g$= 0,10$ g.

Gesucht ist die minütliche Ausscheidungsrate p.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte für a, x und y werden in die Gleichung $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ eingesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach p aufgelöst.

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$$

$$0,10 = 0,50 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{40} \quad | \quad :0,50$$

$$0,20 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{40} \quad | \quad \sqrt[40]{\ }$$

$$\sqrt[40]{0,20} = 1 - \frac{p}{100} \quad | \quad -1$$

$$\sqrt[40]{0,20} - 1 = -\frac{p}{100} \quad | \quad \cdot(-100)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$-100 \cdot \left(\sqrt[40]{0,20} - 1\right) = p$$

$$100 \cdot (-1) \cdot \left(\sqrt[40]{0,20} - 1\right) = p$$

$$100 \cdot \left(-\sqrt[40]{0,20} + 1\right) = p$$

$$p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[40]{0,20}\right)$$

$$p \approx 4$$

$$\Rightarrow \quad f_1 : y = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f_1 für $x \in [0;80]$ in Schritten von $\Delta x = 10$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen zu f_1 in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung:

Auf der x-Achse: 1 cm für 10 min ; $0 \leqq x \leqq 90$
Auf der y-Achse: 1 cm für 0,1 g ; $0 \leqq y \leqq 0,6$

Lösung zu Aufgabe A1.2

Wertetabelle

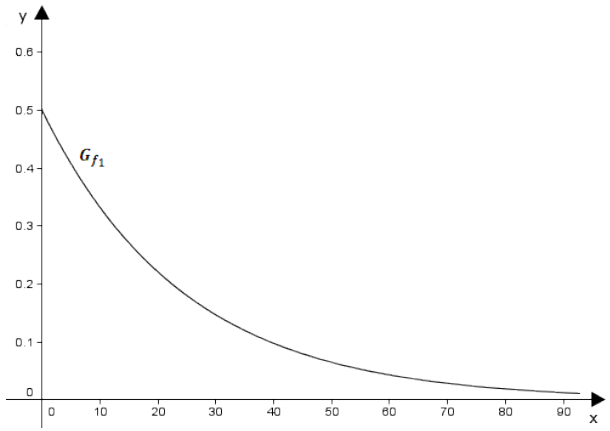
$$f_1 : \quad y = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

Wertetabelle für $x \in [0;80]$ erstellen (Taschenrechner verwenden!):

© Realschulrep.de

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$f_1(x)$	0,5	0,33	0,22	0,15	0,1	0,06	0,04	0,03	0,02

Skizze



Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Um die in 1.1 ermittelte Ausscheidungsrate von 4% zu überprüfen, werden einem weiteren gesunden Menschen $0,80$ g des Farbstoffes verabreicht.
Welche Masse an Farbstoff sollte nach 50 Minuten ausgeschieden sein?

Lösung zu Aufgabe A1.3

Exponentielles Wachstum

Gegeben ist die verabreichte Menge Farbstoff $a = 0,80$ g und die vergangene Zeit $x = 50$ min.

Gesucht ist die verbleibende Masse y, über die dann die ausgeschiedene Masse berechnet werden kann.

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte für a und x werden in die Gleichung $y = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$ eingesetzt.

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$$

$$y = 0,80 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^{50}$$

$$y \approx 0,10$$

Ausgeschiedene Menge: $0,80$ g$-0,10$ g$= 0,70$ g

Antwort:
Nach 50 Minuten sind $0,7$ g des Farbstoffs ausgeschieden.

Aufgabe A1.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Zeit auf ganze Minuten gerundet, nach der 75% des verabreichten Farbstoffs bei einem gesunden Menschen ausgeschieden sein sollen. (Ausscheidungsrate: 4%)

Lösung zu Aufgabe A1.4

Exponentielles Wachstum

Gegeben ist die Ausscheidungsrate $p = 4\%$ und der verbliebene Farbstoff $y = 100\% - 75\% = 25\% = 0,25$.

Gesucht ist die Zeit x.

Erläuterung: *Einsetzen*

Man lässt für die verabreichte Menge Farbstoff die Variable a stehen. Für den verbliebenen Farbstoff setzt man $y = 0,25 \cdot a$ in die Gleichung ein. Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

© Realschulrep.de

$y = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x$

$0,25 \cdot a = a \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x \quad | \quad : a$

$0,25 = 0,96^x \quad | \quad \log_{0,96}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,96^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,96}$ aufgehoben werden.

Beispiel:
$2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$\log_{0,96} 0,25 = x$

$x \approx 34$

Antwort:
Nach 34 Minuten sollten beim gesunden Menschen 75% des verabreichten Farbstoffs ausgeschieden sein.

Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Einem Menschen werden $0,30$ g des Farbstoffs verabreicht. Nach Ablauf von 25 Minuten sind in seiner Bauchspeicheldrüse noch $0,18$ g des Farbstoffs vorhanden.
Geben Sie für diesen Fall die Gleichung der Funktion f_2 an und zeichnen Sie ihren Graphen in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.
[Teilergebnis: $p = 2$ (auf Ganze gerundet)]

Lösung zu Aufgabe A1.5

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $a = 0,30\,\text{g}, \quad x = 25 \text{ min}, \quad y = 0,18\,\text{g}$

Gesucht: p

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Werte a, x und y werden in die Gleichung $y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$ eingesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach p aufgelöst.

$y = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x$

$0,18 = 0,30 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{25} \quad | \quad : 0,30$

$0,60 = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{25} \quad | \quad \sqrt[25]{\ }$

$\sqrt[25]{0,60} = 1 - \frac{p}{100} \quad | \quad -1$

$\sqrt[25]{0,60} - 1 = -\frac{p}{100} \quad | \quad \cdot(-100)$

Erläuterung: *Rechenweg*

$-100 \cdot \left(\sqrt[25]{0,60} - 1\right) = p$

$100 \cdot (-1) \cdot \left(\sqrt[25]{0,60} - 1\right) = p$

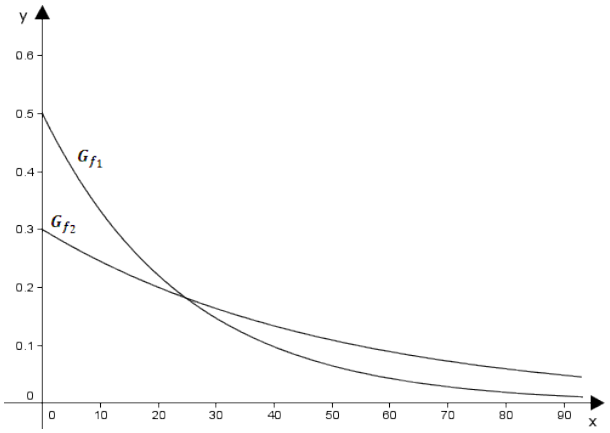
$100 \cdot \left(-\sqrt[25]{0,60} + 1\right) = p$

$p = 100 \cdot \left(1 - \sqrt[25]{0,60}\right)$

$p \approx 2$

$\Rightarrow \quad f_2 : y = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^x$

Skizze



Aufgabe A1.6 (4 Punkte)

$0,50$ g des Farbstoffs werden der Person aus 1.1 und gleichzeitig $0,30$ g der Person aus 1.5 verabreicht.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit auf ganze Minuten gerundet die Personen aus 1.1 und 1.5 die gleiche Masse Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben.

Lösung zu Aufgabe A1.6

Exponentielles Wachstum

Gegeben: f_1 gilt für Person aus 1.1, f_2 gilt für Person aus 1.5

$$f_1 : y = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right)^x \qquad f_2 : y = 0,3 \cdot \left(1 - \frac{2}{100}\right)^x$$

Gesucht: Zeit x, nach der die Personen die gleiche Menge Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben.

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Wenn beide Personen die gleiche Menge Farbstoff in der Bauchspeicheldrüse haben, gilt:

y aus f_1 = y aus f_2, d.h. die beiden Gleichungen werden gleichgesetzt. Anschließend wird nach x aufgelöst.

$$0,5 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{4}{100}\right)^x}_{0,96} = 0,3 \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{100}\right)^x}_{0,98}$$

$$0,5 \cdot 0,96^x = 0,3 \cdot 0,98^x \quad | \quad : (0,96^x \cdot 0,3)$$

$$\frac{0,5}{0,3} = \frac{0,98^x}{0,96^x}$$

Erläuterung: *Potenzregeln*

$\frac{0,98^x}{0,96^x}$ kann mit Hilfe der Potenzregel $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ umgewandelt werden.

$$\frac{0,5}{0,3} = \left(\frac{0,98}{0,96}\right)^x \quad | \quad \log_{\frac{0,98}{0,96}}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $\left(\frac{0,98}{0,96}\right)^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{\frac{0,98}{0,96}}$ aufgehoben werden.

Beispiel:
$2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$$x = \log_{\frac{0,98}{0,96}} \frac{0,5}{0,3}$$

$$x \approx 25$$

Antwort:
Nach 25 Minuten haben die beiden Personen die gleiche Menge Farbstoff in ihrer Bauchspeicheldrüse.

© Realschulrep.de