Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Der Punkt $A(-2|-2)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Eckpunkte $B_n(x|-3x^{-1}-1)$ liegen auf dem Hyperbelast k mit der Gleichung $y=-3x^{-1}-1$ $(G=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=x$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Hyperbelast k für $x>0$ sowie die Rauten $A\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x=2$ und $A\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x=6$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4\leqq x\leqq 8$; $-8\leqq y\leqq 7$

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Definitionsmenge für die Abszissen x der Punkte B_n, sodass Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$ entstehen.

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Innenwinkelmaße der Raute $A\,B_1\,C_1\,D_1$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n.
Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Eckpunkte D_n.
[Teilergebnis: $D_n(-3x^{-1}-1|x)$]

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Unter den Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es ein Quadrat $A\,B_0\,C_0\,D_0$.
Zeichnen Sie das Quadrat $A\,B_0\,C_0\,D_0$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Eckpunkte B_0, C_0 und D_0.

Lösung

Aufgabe B2.

Der Punkt $A(-2|-2)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$. Die Eckpunkte $B_n(x|-3x^{-1}-1)$ liegen auf dem Hyperbelast k mit der Gleichung $y=-3x^{-1}-1$ $(G=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$. Die Punkte C_n liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y=x$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie den Hyperbelast k für $x>0$ sowie die Rauten $A\,B_1\,C_1\,D_1$ für $x=2$ und $A\,B_2\,C_2\,D_2$ für $x=6$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-4\leqq x\leqq 8$; $-8\leqq y\leqq 7$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Gegeben:

$A(-2|-2)$

$B_n(x|-3x^{-1}-1)$ liegen auf dem Hyperbelast $k: y=-3x^{-1}-1$

C_n liegen auf $g:\ y=x$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Hyperbelast k eingezeichnet (Wertetabelle hilfreich).

Dann werden $A(-2|-2)$, $B_1(2|-2,5)$ und die Gerade g eingezeichnet.

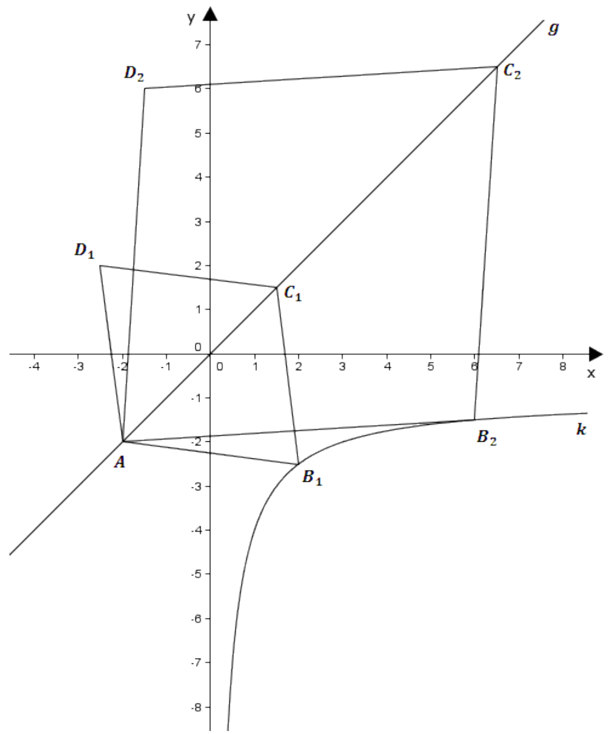
A wird mit B_1 verbunden.

Mit dem Zirkel wird ein Bogen um B_1 mit dem Radius $\overline{AB_1}$ gezeichnet. Der Schnittpunkt dieses Bogens mit der Geraden g ist C_1.

D_1 erhält man durch Spiegelung von B_1 an der Geraden g.

Die Punkte werden zur Raute $A\,B_1\,C_1\,D_1$ verbunden.

Raute $A\,B_2\,C_2\,D_2$ analog.



Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

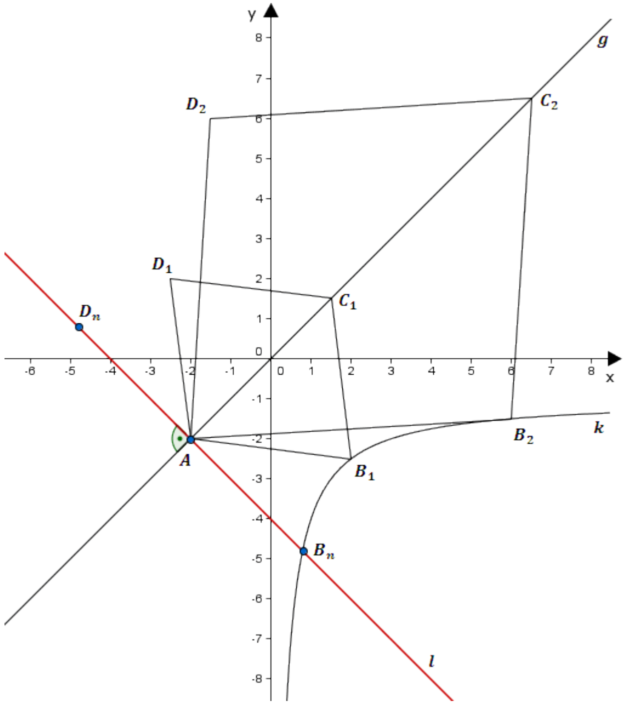
Bestimmen Sie durch Rechnung die Definitionsmenge für die Abszissen x der Punkte B_n, sodass Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$ entstehen.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Definitionsmenge für Abszissen bestimmter Punkte

Die Punkte B_n sind die Schnittpunkte der Diagonalen $B_n\,D_n$ mit der Hyperbel k.

Es entstehen keine Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$ mehr, wenn A, B_n und D_n auf einer Geraden l liegen.



Deshalb wird zuerst eine Gleichung für diese Gerade l gesucht.

> Erläuterung: *Senkrechte Strecken*
>
> In jeder Raute gilt, dass die beiden Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
>
> Nun gilt, dass das Produkt der Steigungen der beiden Diagonalen -1 ergibt, also:
>
> $m_l \cdot m_g = -1$

$m_l \cdot m_g = -1$

$m_l \cdot 1 = -1$

$m_l = -1$

> Erläuterung: *Geradengleichung*
>
> Mit dem Punkt $A(-2|-2)$ und der Steigung $m_l = -1$ kann mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form $y = m_l \cdot (x - x_A) + y_A$ die Gleichung für l berechnet werden.

$l: \quad y = m_l \cdot (x - x_A) + y_A$

$l: \quad y = -1 \cdot (x - (-2)) + (-2)$

$l: \quad y = -x - 4$

> Erläuterung: *Gleichsetzen*
>
> Um die x-Werte der Schnittpunkte B_n von l und k zu berechnen, werden die Gleichungen von l und k gleichgesetzt.

$-x - 4 = -3x^{-1} - 1 \quad | \quad +3x^{-1} + 1$

$-x - 3 + 3x^{-1} = 0 \quad | \quad \cdot x$

$-x^2 - 3x + 3 = 0$

> Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*
>
> $$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{-2}$$

$x_1 = -3,79 \qquad x_2 = 0,79$

$x_1 = -3,79$ ist nicht in der Grundmenge enthalten.

$\Rightarrow \quad D = \{x | x > 0,79\}$

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Innenwinkelmaße der Raute $A\,B_1\,C_1\,D_1$. (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

Lösung zu Aufgabe B2.3

Innenwinkel eines Dreiecks

Gegeben:
$A(-2|-2)$, $B_1(2|-2,5)$ und $\overrightarrow{A\,C}$ (Richtungsvektor von g)

Man berechnet zuerst den Winkel $\varphi = \measuredangle B_1\,A\,C_1$, den die Vektoren $\overrightarrow{A\,B_1}$ und $\overrightarrow{A\,C}$ einschließen.

$$\overrightarrow{A\,B_1} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ -2,5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Vektoren*

Den Winkel α zwischen zwei Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ berechnet man mit der Formel:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$$

Beispiel: $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha = \frac{\binom{0}{3} \circ \binom{2}{1}}{\left|\binom{0}{3}\right| \cdot \left|\binom{2}{1}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{0\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{0^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = 63,43^\circ$$

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{A\,B_1} \circ \overrightarrow{A\,C}}{\overline{A\,B_1} \cdot \overline{A\,C}}$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

$\overrightarrow{A\,C}$ ist der Richtungsvektor von g.

Der x-Wert des Richtungsvektors einer Geraden ist 1, der y-Wert des Richtungsvektors ist die Steigung der Geraden.

$$\cos\varphi = \frac{\binom{4}{-0,5} \circ \binom{1}{1}}{\left|\binom{4}{-0,5}\right| \cdot \left|\binom{1}{1}\right|}$$

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 1 + (-0,5)\cdot 1}{\sqrt{4^2+(-0,5)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3,5}{\sqrt{16,25}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 52,13^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle B_1\,A\,D_1 = 2\cdot 52,13^\circ = 104,26^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle D_1\,C_1\,B_1 = 104,26^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle C_1\,B_1\,A = \frac{360^\circ - 2\cdot 104,26^\circ}{2} = 75,74^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle A\,D_1\,C_1 = 75,74^\circ$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n.
Bestimmen Sie sodann die Gleichung des Trägergraphen h der Eckpunkte D_n.
[Teilergebnis: $D_n(-3x^{-1}-1|x)$]

Lösung zu Aufgabe B2.4

Spiegelung an einer Ursprungsgeraden

Die Punkte D_n entstehen durch Spiegelung der Punkte B_n an der Ursprungsgerade g.

Gegeben: $B_n\left(x|-3x^{-1}-1\right)$

Erläuterung: *Spiegelung*

Der Winkel von 90° in der Spiegelungsmatrix ist das Doppelte des 45°-Winkels, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt.

Allgemein:
Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt , so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1}-1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1}-1 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot x + b\cdot y \\ c\cdot x + d\cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot x + 1\cdot\left(-3x^{-1}-1\right) \\ 1\cdot x + 0\cdot\left(-3x^{-1}-1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^{-1}-1 \\ x \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow \quad D_n \left(-3x^{-1}-1|x\right)$

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

Gegeben: $D_n \left(-3x^{-1}-1|x\right)$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n

Gesucht: Trägergraph $h : y = ?$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x-Koordinate $-3x-1$ von D_n wird nach x aufgelöst.

Anschließend wird der Term in die y-Koordinate von D_n eingesetzt.

$x' = -3x^{-1} - 1 \quad | \quad +1$

$x' + 1 = -3x^{-1} \quad | \quad :(-3)$

$\dfrac{x'+1}{-3} = x^{-1} \quad | \quad$ Kehrbruch

Erläuterung: *Potenzregeln, Kehrbruch*

Es gilt immer: $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

Um nach x aufzulösen, wird auf beiden Seiten der Gleichung der Kehrbruch angewendet.

$\dfrac{-3}{x'+1} = x$

$y' = x = \dfrac{-3}{x'+1}$

$\Rightarrow \quad h : y = \dfrac{-3}{x+1}$

Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Unter den Rauten $A\,B_n\,C_n\,D_n$ gibt es ein Quadrat $A\,B_0\,C_0\,D_0$.
Zeichnen Sie das Quadrat $A\,B_0\,C_0\,D_0$ in das Koordinatensystem zu 2.1 ein.
Berechnen Sie sodann die Koordinaten der Eckpunkte B_0, C_0 und D_0.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Skizze

Quadrat $A\,B_0\,C_0\,D_0$ einzeichnen:

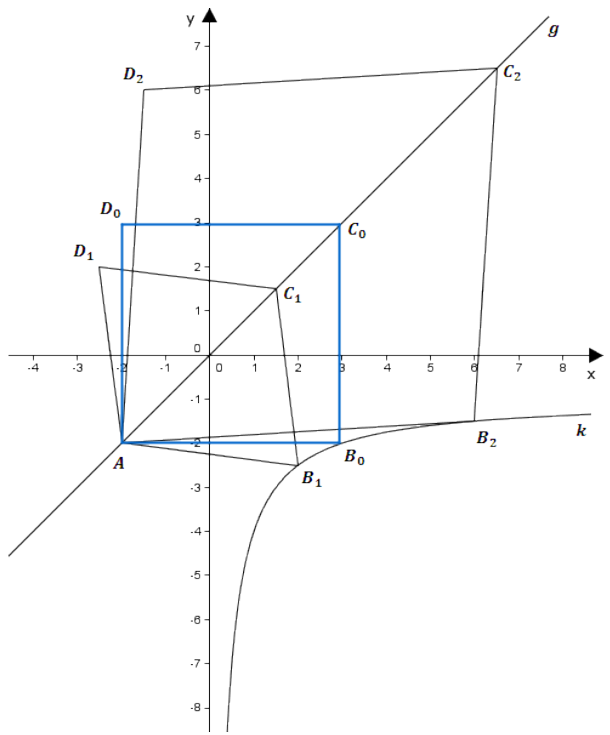
Erläuterung: *Einzeichnen*

In einem Quadrat schließt die Diagonale mit der Seitenlinie einen 45°-Winkel ein.

$\Rightarrow \quad \measuredangle B_0\,A\,C_0 = 45^\circ$ wird zuerst eingezeichnet.

Der Scheitel dieses Winkels schneidet die Hyperbel k in B_0.

Jetzt kann das Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{A\,B_0}$ vervollständigt werden.



Koordinaten von Punkten ermitteln

Die Seiten im Quadrat stehen senkrecht aufeinander, somit auch $\overrightarrow{A\,B_n}$ und $\overrightarrow{A\,D_n}$.

Erläuterung: *Senkrechte Strecken , Senkrechte Vektoren, Skalarprodukt*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$\overrightarrow{A\,B_n} \circ \overrightarrow{A\,D_n} = 0$

$\overrightarrow{A\,B_n} = \begin{pmatrix} x \\ -3x^{-1} - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -3x^{-1} + 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{D_n} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} - 1 \\ x \end{pmatrix}$, da die Punkte D_n durch Spiegelung der Punkte B_n an $g : y = x$ entstehen.

$\overrightarrow{A\,D_n} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} - 1 \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^{-1} + 1 \\ x + 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x + 2 \\ -3x^{-1} + 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3x^{-1} + 1 \\ x + 2 \end{pmatrix} = 0$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

$(x + 2) \cdot \left(-3x^{-1} + 1\right) + \left(-3x^{-1} + 1\right) \cdot (x + 2) = 0$

$2 \cdot (x + 2) \cdot \left(-3x^{-1} + 1\right) = 0$

$(2x + 4) \cdot \left(-3x^{-1} + 1\right) = 0$

$-6 + 2x - 12x^{-1} + 4 = 0$

$2x - 12x^{-1} - 2 = 0 \quad | \quad \cdot x$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4}$$

$x_1 = 3 \qquad (x_2 = -2)$

$x_2 = -2$ ist nicht in der Grundmenge enthalten.

x ist die Abszisse der Punkte B_n.

$\Rightarrow \qquad B_0(3|-3 \cdot 3^{-1} - 1) \qquad \Rightarrow \qquad B_0(3|-2)$

C_0 hat den gleichen x-Wert wie B_0 und den y-Wert $y = x$.

$\Rightarrow \qquad C_0(3|3)$

D_0 hat den gleichen x-Wert wie A und den gleichen y-Wert wie C_0.

$\Rightarrow \qquad D_0(-2|3)$