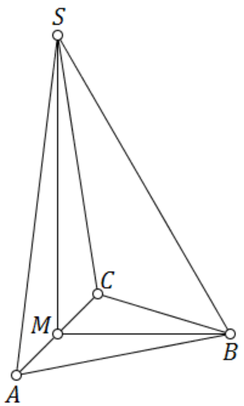
Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe P2

Aufgabe P2.

Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AC} = 8$ cm ist der Punkt M der Mittelpunkt der Basis $[AC]$ und es gilt: $\overline{MB} = 6$ cm.
Das Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt M liegt. Der Winkel SBM hat das Maß $\varepsilon = 60°$.
In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}; \omega = 45°$



Aufgabe P2.1 (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass für die Höhe $\overline{MS}$ der Pyramide $ABCS$ gilt: $\overline{MS} = 6\sqrt{3}$ cm.

Aufgabe P2.2 (1 Punkt)

Punkte P_n auf der Kante $[BS]$ sind die Spitzen von Pyramiden AB_nCP_n. Die Punkte B_n liegen auf der Verlängerung von $[MB]$ über B hinaus. Es gilt: $\overline{BB_n} = \overline{P_nS}$.
Die Winkel P_nMS haben das Maß $\varphi(0 \leqq \varphi < 90°)$.
Zeichnen Sie die Pyramide AB_1CP_1 für $\varphi = 20°$ in die Zeichnung zu 2.0 ein.

Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Es gilt: $\overline{MB_n} = x$ cm.
Berechnen Sie das Intervall für x $(x \in \mathbb{R})$.

Aufgabe P2.4 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Streckenlängen $\overline{P_nS}$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{P_nS}(\varphi) = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 30°)}$ cm.

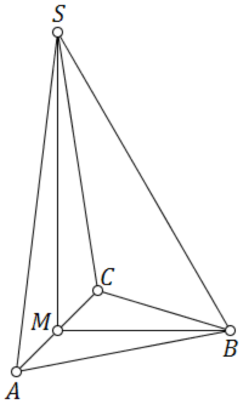
Aufgabe P2.5 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ so, dass die Grundfläche AB_2C der Pyramide AB_2CP_2 einen Flächeninhalt von 50 cm^2 hat.

Lösung

Aufgabe P2.

Im gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basislänge $\overline{AC} = 8$ cm ist der Punkt M der Mittelpunkt der Basis $[AC]$ und es gilt: $\overline{MB} = 6$ cm.
Das Dreieck ABC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt M liegt. Der Winkel SBM hat das Maß $\varepsilon = 60°$.
In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}; \omega = 45°$



Aufgabe P2.1 (1 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Höhe $\overline{MS}$ der Pyramide $ABCS$ gilt: $\overline{MS} = 6\sqrt{3}$ cm.

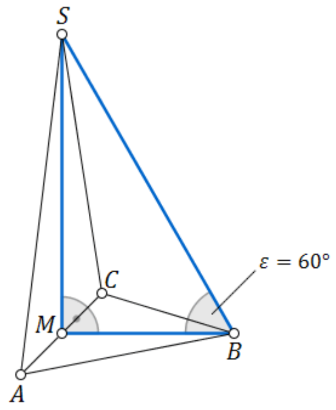
Lösung zu Aufgabe P2.1

Höhen der Pyramide

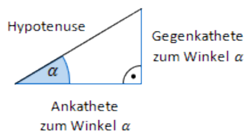
Gegeben: $\overline{MB} = 6$ cm $\varepsilon = 60°$

Gesucht: $\overline{MS}$

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck MBS.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\varepsilon = \frac{\overline{MS}}{\overline{MB}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\overline{MB} = 6$ cm und $\varepsilon = 60^\circ$ werden in die Gleichung eingesetzt.

Anschließend wird nach $\overline{MS}$ aufgelöst.

$\tan 60^\circ = \dfrac{\overline{MS}}{6} \quad | \quad \cdot 6$

$6 \cdot \tan 60^\circ = \overline{MS}$

$\Rightarrow \quad \overline{MS} = 6 \cdot \sqrt{3}$ cm

Aufgabe P2.2 (1 Punkte)

Punkte P_n auf der Kante $[BS]$ sind die Spitzen von Pyramiden AB_nCP_n. Die Punkte B_n liegen auf der Verlängerung von $[MB]$ über B hinaus. Es gilt: $\overline{BB_n} = \overline{P_nS}$.
Die Winkel P_nMS haben das Maß $\varphi (0 \leqq \varphi < 90^\circ)$.
Zeichnen Sie die Pyramide AB_1CP_1 für $\varphi = 20^\circ$ in die Zeichnung zu 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe P2.2

Skizze

Gegeben:

$\measuredangle P_1MS = \varphi = 20^\circ$

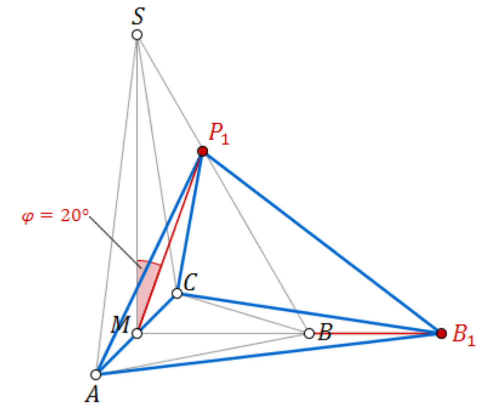
$\overline{BB_1} = \overline{P_1S}$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Winkel $\measuredangle P_1MS = \varphi = 20^\circ$ eingezeichnet, wodurch man den Punkt P_1 auf der Kante $[BS]$ erhält.

Nun wird die Länge der Strecke $[P_1S]$ abgemessen und an die Verlängerung von $[MB]$ über B hinaus angetragen. Dies liefert den Punkt B_1.

Zum Schluss verbindet man die Punkte zur Pyramide AB_1CP_1.



Aufgabe P2.3 (2 Punkte)

Es gilt: $\overline{MB_n} = x$ cm.
Berechnen Sie das Intervall für x $(x \in \mathbb{R})$.

Lösung zu Aufgabe P2.3

2-dimensionale Geometrie

$\overline{MB_n}$ setzt sich zusammen aus $\overline{MB}$ und $\overline{BB_n}$.

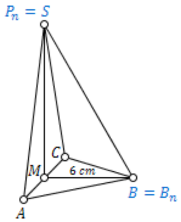
Da $\overline{MB} = 6$ cm gegeben ist, ist $\overline{MB_n}$ von der veränderbaren Länge $\overline{BB_n}$ abhängig.

Da $\overline{BB_n} = \overline{P_nS}$ (Aufgabe P2.2), ist $\overline{BB_n}$ von der Lage von P_n abhängig.

Man untersucht nun die Randlagen von P_n.

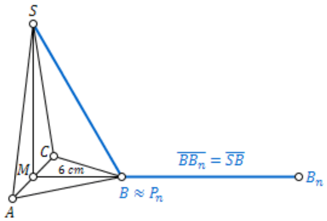
1. Randlage:

$P_n = S \quad \Rightarrow \quad B_n = B \quad \Rightarrow \quad \overline{MB_n} = 6$ cm



2. Randlage:

$P_n \approx B \quad \Rightarrow \quad \overline{M\,B_n} = 6 + \overline{S\,B}$



Nun muss zur Ermittlung der 2. Randlage noch $\overline{S\,B}$ bestimmt werden.

> Erläuterung: *Satz des Pythagoras*
>
> In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$\overline{S\,B}^2 = \overline{M\,B}^2 + \overline{M\,S}^2$

$\overline{S\,B}^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 \quad | \quad \sqrt{}$

$\overline{S\,B} = \sqrt{36 + 108} = 12$ cm

$\Rightarrow \quad \overline{M\,B_n} = 6 + \overline{S\,B} = 6 + 12 = 18$ cm

$\Rightarrow \quad x \in [6; 18[$

Der Randwert 18 wird ausgeschlossen, da hier keine Pyramide mehr vorliegen würde (Höhe

gleich 0).

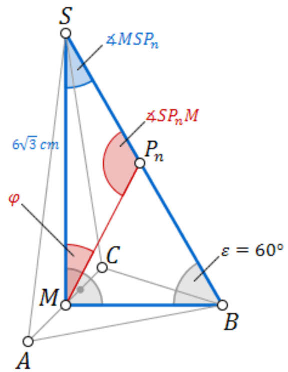
Aufgabe P2.4 (1 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Streckenlängen $\overline{P_n\,S}$ in Abhängigkeit von φ gilt: $\overline{P_n\,S}(\varphi) = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 30°)}$ cm.

Lösung zu Aufgabe P2.4

Länge einer Strecke

Man betrachtet das Dreieck $M\,B\,S$ mit $\varepsilon = 60°$.



Der Winkel $M\,S\,P_n$ kann im rechtwinkligen Dreieck $M\,B\,S$ über die Winkelsumme berechnet werden.

> Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*
>
> Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180°.

$\measuredangle M\,S\,P_n = 180° - 90° - \varepsilon = 90° - 60° = 30°$

Nun kann im Dreieck $P_n\,S\,M$ auch der Winkel $\measuredangle S\,P_n\,M$ in Abhängigkeit von φ berechnet werden:

$\measuredangle S\,P_n\,M = 180° - (\varphi + 30°)$

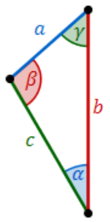
Dieser Winkel liegt der gegebenen Strecke $[M\,S]$ gegenüber.

Im Dreieck $P_n\,S\,M$ kommen die gesuchte Strecke $P_n\,S$ und der Winkel φ vor.

Außerdem ist im Dreieck $P_n\,S\,M$ auch $\overline{M\,S} = 6\sqrt{3}$ cm gegeben.

Jetzt ist die Berechnung von $\overline{P_n\,S}$ mit Hilfe des Sinussatzes möglich.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{P_n\,S}}{\overline{M\,S}} = \frac{\sin\varphi}{\sin\measuredangle S\,P_n\,M}$$

$$\frac{\overline{P_n\,S}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180° - (\varphi + 30°))} \qquad | \quad \cdot 6\sqrt{3}$$

$$\overline{P_n\,S} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin\varphi}{\sin(180° - (\varphi + 30°))}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$$\sin x = \sin(180° - x)$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{P_n\,S}(\varphi) = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi + 30°)}\,cm$$

Aufgabe P2.5 (4 Punkte)

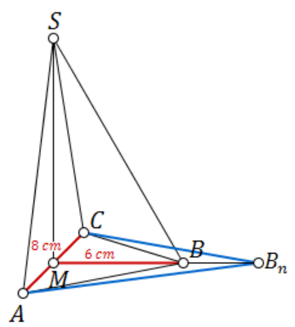
Berechnen Sie das Maß φ so, dass die Grundfläche $A\,B_2\,C$ der Pyramide $A\,B_2\,C\,P_2$ einen Flächeninhalt von 50 cm^2 hat.

Lösung zu Aufgabe P2.5

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben:

$$A_{A\,B_2\,C} = 50\ cm^2, \quad \overline{M\,B} = 6\ cm, \quad \overline{A\,C} = 8\ cm, \quad \overline{B\,B_n} = \overline{P_n\,S} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin\varphi}{\sin(\varphi + 30°)}$$



Man erstellt die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks $A\,B_2\,C$ und setzt die gegebenen Werte ein.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$50 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MB_n}$$

$$50 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left(6 + \overline{BB_n}\right) \qquad \text{siehe obige Skizze}$$

$$50 = 4 \cdot \left(6 + \overline{P_n S}\right)$$

$$50 = 4 \cdot \left(6 + \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)}\right) \qquad | \quad :4$$

$$12,5 = 6 + \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \qquad | \quad -6$$

$$6,5 = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 30^\circ)} \qquad | \quad \cdot\sin(\varphi + 30^\circ)$$

$$6,5 \cdot \sin(\varphi + 30^\circ) = 6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$6,5 \cdot (\sin\varphi \cdot \cos 30^\circ + \cos\varphi \cdot \sin 30^\circ) = 6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi \qquad | \quad \text{Klammern auflösen}$$

$$6,5 \sin\varphi \cos 30^\circ + 6,5 \cos\varphi \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \sin\varphi$$

$$6,5 \sin\varphi \cos 30^\circ - 6\sqrt{3} \sin\varphi = -6,5 \cos\varphi \sin 30^\circ$$

$$\sin\varphi \cdot \left(6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}\right) = -6,5 \cos\varphi \sin 30^\circ \qquad | \quad :\cos\varphi$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\varphi \cdot \left(6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}\right) = -6,5 \sin 30^\circ \qquad | \quad : \left(6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}\right)$$

$$\tan\varphi = \frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan\varphi = \frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-6,5 \sin 30^\circ}{6,5 \cos 30^\circ - 6\sqrt{3}}\right) \approx 34,31^\circ$$