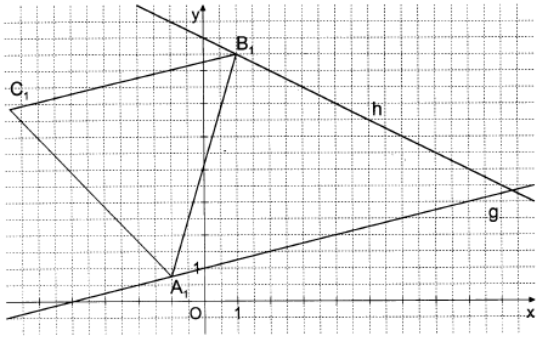
# Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe P3

**Aufgabe P3.**

Punkte $A_n\left(x|\frac{1}{4}x+1\right)$ auf der Geraden $g$ mit der Gleichung $y=\frac{1}{4}x+1$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ und Punkte $B_n$ auf der Geraden $h$ mit der Gleichung $y=-\frac{1}{2}x+8$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ bilden zusammen mit Punkten $C_n$ gleichseitige Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$. Die Abszisse der Punkte $B_n$ ist stets um zwei größer als die Abszisse $x$ der Punkte $A_n$.




**Aufgabe P3.1** (1 Punkt)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=4$.

**Aufgabe P3.2** (4 Punkte)

Die Punkte $B_n$ können auf die Punkte $C_n$ abgebildet werden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte $C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse $x$ der Punkte $A_n$.

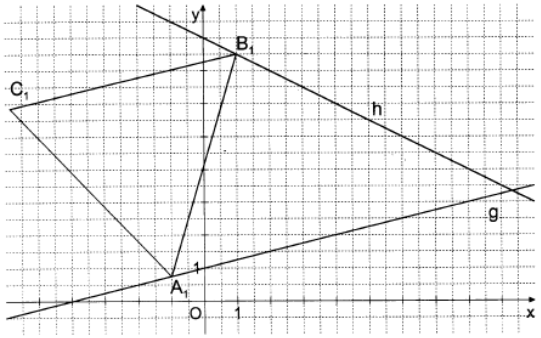




# Lösung

## Aufgabe P3.

Punkte $A_n\left(x|\frac{1}{4}x+1\right)$ auf der Geraden $g$ mit der Gleichung $y=\frac{1}{4}x+1$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ und Punkte $B_n$ auf der Geraden $h$ mit der Gleichung $y=-\frac{1}{2}x+8$ $(G=\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ bilden zusammen mit Punkten $C_n$ gleichseitige Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$. Die Abszisse der Punkte $B_n$ ist stets um zwei größer als die Abszisse $x$ der Punkte $A_n$.




## Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=4$.

### Lösung zu Aufgabe P3.1

***Skizze***

Gegeben:

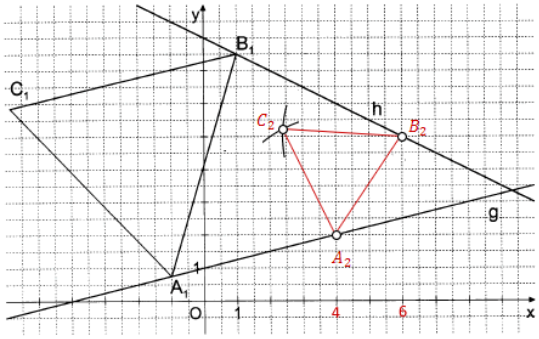
$A\left(x|\frac{1}{4}x+1\right), \quad x=4$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Durch Einsetzen von $x = 4$ ergibt sich $A_2(4|2)$.

Der x-Wert (Abszisse) von $B_2$ ist um 2 größer als 4, also 6. Nun wird bei $x = 6$ der Punkt $B_2$ auf der Geraden $h$ eingezeichnet.

Nach Verbinden der Strecke $[A_2\,B_2]$, zeichnet man jeweils um $A_2$ und $B_2$ mit dem Zirkel einen Bogen mit dem Radius $\overline{A_2\,B_2}$. Der Schnittpunkt der Bögen ist $C_2$.




**Aufgabe P3.2** (4 Punkte)

Die Punkte $B_n$ können auf die Punkte $C_n$ abgebildet werden.
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte $C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse $x$ der Punkte $A_n$.

**Lösung zu Aufgabe P3.2**

***Koordinaten von Punkten ermitteln***

Gegeben: $A_n\left(x|\frac{1}{4}x+1\right)$

Die Punkte $C_n$ entstehen durch Drehung der Punkte $B_n$ um $60°$ um das Drehzentrum $A_n$.





Vor Anwendung der Drehung müssen die Koordinaten der Punkte $B_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse $x$ der Punkte $A_n$ berechnet werden.

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Da die Abszisse der Punkte $B_n$ stets um zwei größer als die Abszisse $x$ der Punkte $A_n$ ist, ergibt sich für die $x$-Koordinate der Punkte $B_n$ $x+2$, also $B_n(x+2|?)$.

Die fehlende $y$-Koordinate erhält man, indem $x+2$ in die Gleichung der Geraden $h$ eingesetzt wird.

$$B_n\left(x+2|-\frac{1}{2}\cdot(x+2)+8\right)$$
$$\Rightarrow \quad B_n\left(x+2|-\frac{1}{2}x+7\right)$$

***Drehung***

Jetzt wird der Vektor $\overrightarrow{A_n\,B_n}$ berechnet, der anschließend um $60°$ gedreht wird.

$$\overrightarrow{A_n\,B_n} = \begin{pmatrix} x+2 \\ -\frac{1}{2}x+7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{4}x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x+6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist $\alpha$ der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Hier wird um das Drehzentrum $A_n$ gedreht, welches dann anschließend noch aufaddiert werden muss.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x+6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x+6 \end{pmatrix}$$

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 6\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix}$$

Aufaddieren des Drehzentrums $A_n$:

$$\overrightarrow{C_n'} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0,25x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,65x - 4,2 \\ -0,125x + 5,73 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C_n(1,65x - 4,2| - 0,125x + 5,73)$