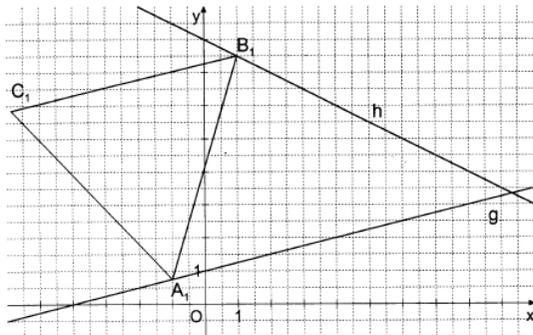


Mittlere-Reife-Prüfung 2007 Mathematik I Aufgabe P3

Aufgabe P3.

Punkte $A_n \left(x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und Punkte B_n auf der Geraden h mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 8$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) bilden zusammen mit Punkten C_n gleichseitige Dreiecke $A_n B_n C_n$. Die Abszisse der Punkte B_n ist stets um zwei größer als die Abszisse x der Punkte A_n .



Aufgabe P3.1 (1 Punkt)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $x = 4$.

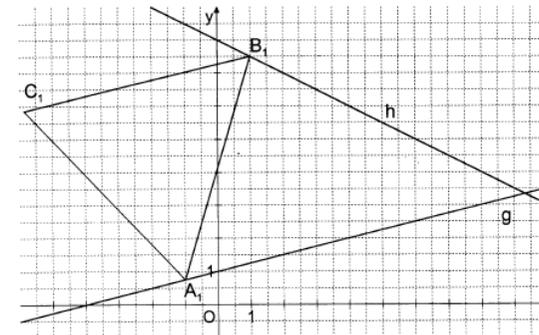
Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Die Punkte B_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden. Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

Lösung

Aufgabe P3.

Punkte $A_n \left(x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x + 1$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) und Punkte B_n auf der Geraden h mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x + 8$ ($G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) bilden zusammen mit Punkten C_n gleichseitige Dreiecke $A_n B_n C_n$. Die Abszisse der Punkte B_n ist stets um zwei größer als die Abszisse x der Punkte A_n .



Aufgabe P3.1 (1 Punkte)

Ergänzen Sie die Zeichnung zu 3.0 um das Dreieck $A_2 B_2 C_2$ für $x = 4$.

Lösung zu Aufgabe P3.1

Skizze

Gegeben:

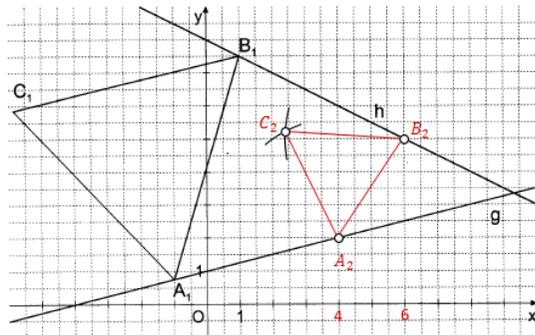
$$A \left(x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right), \quad x = 4$$

Erläuterung: *Einzeichnen*

Durch Einsetzen von $x = 4$ ergibt sich $A_2(4|2)$.

Der x -Wert (Abszisse) von B_2 ist um 2 größer als 4, also 6. Nun wird bei $x = 6$ der Punkt B_2 auf der Geraden h eingezeichnet.

Nach Verbinden der Strecke $[A_2 B_2]$, zeichnet man jeweils um A_2 und B_2 mit dem Zirkel einen Bogen mit dem Radius $\overline{A_2 B_2}$. Der Schnittpunkt der Bögen ist C_2 .



Aufgabe P3.2 (4 Punkte)

Die Punkte B_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.

Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte C_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

Lösung zu Aufgabe P3.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n \left(x \mid \frac{1}{4}x + 1 \right)$

Die Punkte C_n entstehen durch Drehung der Punkte B_n um 60° um das Drehzentrum A_n .

Vor Anwendung der Drehung müssen die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n berechnet werden.

Erläuterung: *Koordinaten von Punkten in Abhängigkeit von der Abszisse anderer Punkte*

Da die Abszisse der Punkte B_n stets um zwei größer als die Abszisse x der Punkte A_n ist, ergibt sich für die x -Koordinate der Punkte B_n $x + 2$, also $B_n(x + 2|?)$.

Die fehlende y -Koordinate erhält man, indem $x + 2$ in die Gleichung der Geraden h eingesetzt wird.

$$B_n \left(x + 2 \mid -\frac{1}{2} \cdot (x + 2) + 8 \right)$$

$$\Rightarrow B_n \left(x + 2 \mid -\frac{1}{2}x + 7 \right)$$

Drehung

Jetzt wird der Vektor $\overrightarrow{A_n B_n}$ berechnet, der anschließend um 60° gedreht wird.

$$\overrightarrow{A_n B_n} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -\frac{1}{2}x + 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{4}x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende

Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Hier wird um das Drehzentrum A_n gedreht, welches dann anschließend noch aufaddiert werden muss.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{4}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + (-\frac{1}{2}\sqrt{3}) \cdot (-\frac{3}{4}x + 6) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{4}x + 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix}$$

Aufaddieren des Drehzentrums A_n :

$$\vec{C}_n = \begin{pmatrix} 0,65x - 4,2 \\ -0,375x + 4,73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0,25x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,65x - 4,2 \\ -0,125x + 5,73 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(1,65x - 4,2 | -0,125x + 5,73)$$