Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.0

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 2 \cdot \log_3(x+1) - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an und zeichnen Sie den Graphen zu f für $x \in [-0,5; 8]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 9$; $-4 \leqq y \leqq 7$.

Aufgabe A1.2 (4 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ auf den Graphen der Funktion f' abgebildet. Der Punkt $P'(0|4)$ liegt auf dem Graphen zu f'.
Berechnen Sie den Wert von a.
Ermitteln Sie sodann die Gleichung der Funktion f' durch Rechnung und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|2 \cdot \log_3(x+1) - 2)$ auf dem Graphen zu f und Punkte $C_n(x|2 \cdot \log_3(x+3) + 2)$ auf dem Graphen zu f' haben dieselbe Abszisse x und sind für $x > -1$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$.
Es gilt: $\overline{B_n D_n} = 3$ LE.
Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 0$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe A1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalenschnittpunkte M_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n gilt: $M_n\left(x|\log_3\left(x^2 + 4x + 3\right)\right)$.

Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Der Diagonalenschnittpunkt M_3 der Raute $A_3 B_3 C_3 D_3$ liegt auf der x-Achse.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_3. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe A1.6 (3 Punkte)

Die Raute $A_4 B_4 C_4 D_4$ hat den Flächeninhalt 10 FE.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes C_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung

Aufgabe A1.0

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = 2 \cdot \log_3(x+1) - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe A1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an und zeichnen Sie den Graphen zu f für $x \in [-0,5; 8]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-3 \leqq x \leqq 9$; $-4 \leqq y \leqq 7$.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Definitionsbereich bestimmen

$f : y = 2 \cdot \log_3(x+1) - 2$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $\log_3(x+1)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x + 1 > 0$.

$x + 1 > 0 \quad | \quad -1$

$x > -1$

$\Rightarrow \quad D_f =]-1; \infty[$

Asymptoten einer Funktion

$D_f =]-1; \infty[$

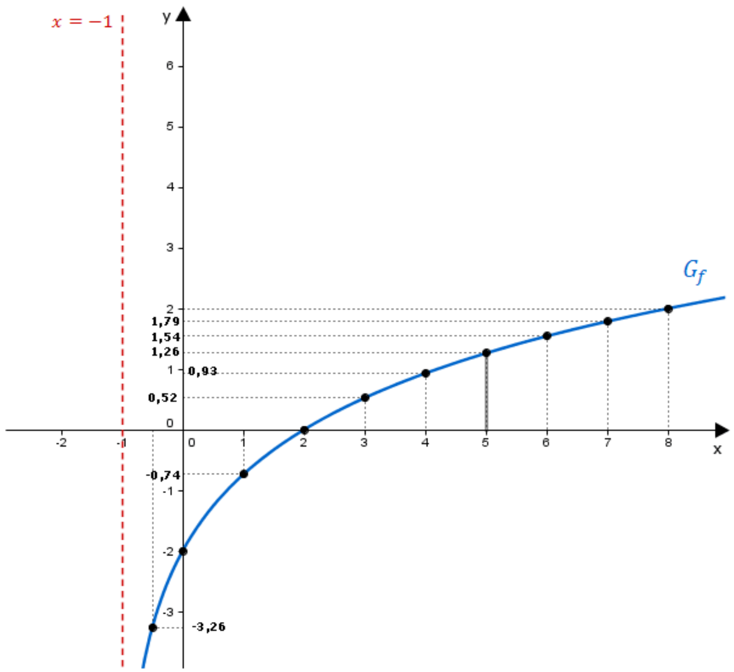
$\Rightarrow \quad h : x = -1 \quad$ (senkrechte Asymptote)

Skizze

Wertetabelle erstellen:

x	$-0{,}5$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y = 2\log_3(x+1) - 2$	$-3{,}26$	-2	$-0{,}74$	0	0,52	0,93	1,26	1,54	1,79	2

Graph G_f der Funktion f zeichnen:



Aufgabe A1.2 (4 Punkte)

Der Graph der Funktion f wird durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ auf den Graphen der Funktion f' abgebildet. Der Punkt $P'(0|4)$ liegt auf dem Graphen zu f'.

Berechnen Sie den Wert von a.
Ermitteln Sie sodann die Gleichung der Funktion f' durch Rechnung und zeichnen Sie den Graphen zu f' in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Verschiebung um einen Vektor

Parameter a bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Wegen der Parallelverschiebung gilt: $\overrightarrow{f'} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{v}$

Da der Punkt P' auf dem Graphen zu f' liegt, folgt: $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{v}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{P'}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot \log_3(x+1) - 2 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{f}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{v}}$$

Erläuterung: *Vektoraddition*

Vektoren werden zeilenweise addiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad \text{z.B.} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lcl} \text{(I)} & 0 = & x + a \\ \text{(II)} & 4 = & 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt: $x = -a$

$x = -a$ in Gleichung (II) einsetzen und nach a auflösen:

$4 = 2 \cdot \log_3(-a+1) + 2 \quad | \quad -2$

$2 = 2 \cdot \log_3(-a+1) \quad | \quad : 2$

$1 = \log_3(-a+1) \quad | \quad$ entlogarithmieren

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_3$ kann durch die Exponentialfunktion 3^x aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_3 x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{\log_3 x} = 3^1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3$

$3 = -a + 1 \quad | \quad -1$

$2 = -a$

$\Rightarrow \quad a = -2$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Gleichung von f' bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \cdot \log_3(x+1) - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{lrcl} \text{(I)} & x' & = & x - 2 \\ \text{(II)} & y' & = & 2 \cdot \log_3(x+1) + 2 \end{array}$$

Aus Gleichung (I) folgt: $x = x' + 2$

$x = x' + 2$ in Gleichung (II) einsetzen: $y' = 2 \cdot \log_3(x' + 3) + 2$

Erläuterung: *Einsetzen*

Anstelle von y' und x' wird y und x geschrieben.

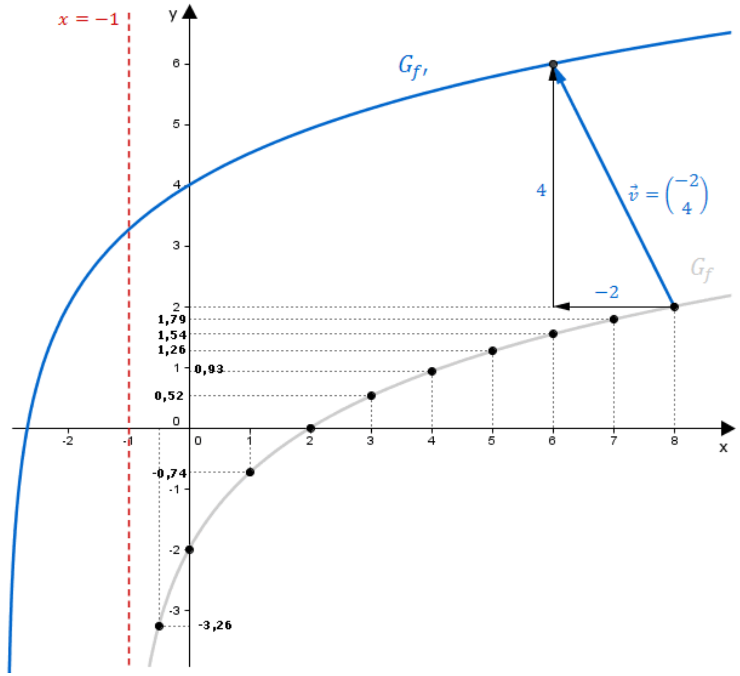
$\Rightarrow \quad y = 2 \cdot \log_3(x+3) + 2$

Skizze

Graphen zu f' einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Der Graph zu f' kann durch das Erstellen einer Wertetabelle (wie in Aufgabe A1.1) eingezeichnet werden oder durch das Verschieben aller Punkte auf dem Graphen zu f um den Vektor $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (siehe Beispiel in der Zeichnung).



Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|2 \cdot \log_3(x+1) - 2)$ auf dem Graphen zu f und Punkte $C_n(x|2 \cdot \log_3(x+3) + 2)$ auf dem Graphen zu f' haben dieselbe Abszisse x und sind für $x > -1$ zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n B_n C_n D_n$.

Es gilt: $\overline{B_n D_n} = 3$ LE .
Zeichnen Sie die Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = 0$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Skizze

Rauten $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ zeichnen:

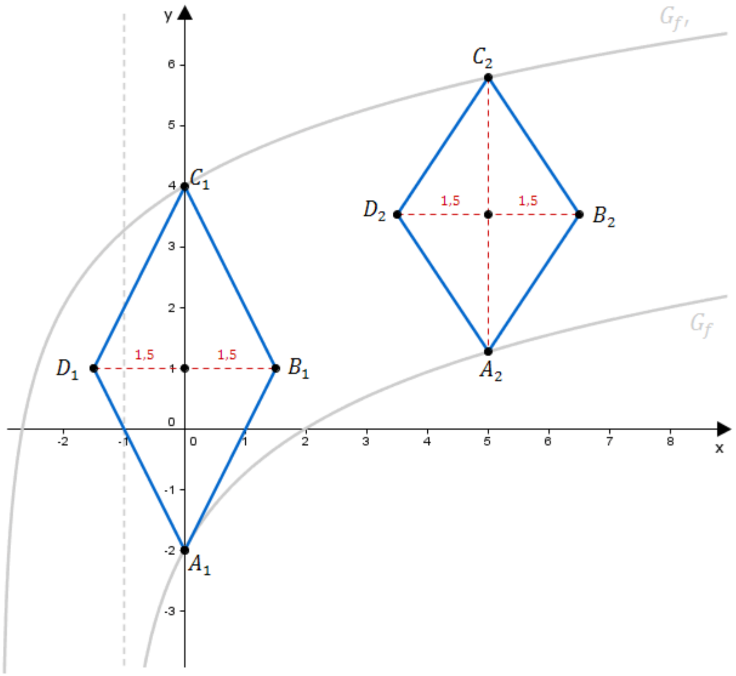
Erläuterung: *Erläuterung*

A_1 bzw. C_1 liegt auf dem Graphen zu f bzw. f' für $x = 0$.

Da sich die Diagonalen einer Raute halbieren, liegen B_1 und D_1 auf der Höhe des Mittelpunkts der Strecke $[A_1 C_1]$.

Es gilt: $\overline{B_1 D_1} = 3$

Die Beschriftung der Punkte erfolgt entgegen dem Uhrzeigersinn.



Aufgabe A1.4 (2 Punkte)

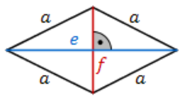
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalenschnittpunkte M_n der Rauten $A_n B_n C_n D_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n und C_n gilt: $M_n\left(x|\log_3\left(x^2+4x+3\right)\right)$.

Lösung zu Aufgabe A1.4

Mittelpunkt einer Strecke

Aus Teilaufgabe 1.3: $A_n(x|2 \cdot \log_3(x+1) - 2)$; $C_n(x|2 \cdot \log_3(x+3) + 2)$

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*



Die Diagonalen e und f einer Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.

M_n ist somit Mittelpunkt der Diagonale $[A_n C_n]$.

M_n ist Mittelpunkt der Strecke $[A_n C_n]$.

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[AB]$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist gegeben durch:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}\middle|\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M_n\left(\frac{x+x}{2}\middle|\frac{2\cdot\log_3(x+1)-2+2\cdot\log_3(x+3)+2}{2}\right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{2\cdot\log_3(x+1)+2\cdot\log_3(x+3)\overbrace{-2+2}^{0}}{2}$$

$$\frac{2\cdot[\log_3(x+1)+\log_3(x+3)]}{2}$$

$$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)$$

$$M_n\left(x \quad \middle| \log_3(x+1)+\log_3(x+3)\right)$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Produkts*

$$\log_a(s\cdot t)=\log_a(s)+\log_a(t)$$

$$M_n\left(x \quad \middle| \log_3\left[(x+1)\cdot(x+3)\right]\right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\begin{aligned}(x+1)\cdot(x+3) &= x^2+3x+x+3\\ &= x^2+4x+3\end{aligned}$$

$$M_n\left(x \quad \middle| \log_3\left(x^2+4x+3\right)\right)$$

Aufgabe A1.5 (3 Punkte)

Der Diagonalenschnittpunkt M_3 der Raute $A_3B_3C_3D_3$ liegt auf der x-Achse. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_3. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

$$M_n\left(x \quad \middle| \log_3\left(x^2+4x+3\right)\right) \qquad \text{(bekannt aus Teilaufgabe 1.4)}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

M_3 liegt auf der x-Achse.
Die y-Koordinate eines Punktes, der auf der x-Achse liegt, ist gleich Null.

$M_3(x|0)$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die allgemeine y-Koordinate der Punkte M_n ist gleich $\log_3\left(x^2+4x+3\right)$. Gesucht ist für welches x diese Koordinate gleich Null ist.

$\log_3\left(x^2+4x+3\right)=0 \quad | \quad$ entlogarithmieren

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_3$ kann durch die Exponentialfunktion 3^x aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_3 x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{\log_3 x} = 3^0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1$

$x^2+4x+3=1 \quad | \quad -1$

$x^2+4x+2=0 \quad |$ Mitternachtsformel anwenden oder mit Taschenrechner lösen

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2+b\,x+c=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

Hier:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2}$$

$x_1 \approx -0,59 \quad$ und $\quad x_2 \approx -3,41$

$x_2 \notin D_f =]-1;\infty[\quad \Rightarrow \quad x_2$ ist keine Lösung.

$\Rightarrow \quad M_3(-0,59|0)$

$C_n(x|2\cdot\log_3(x+3)+2)$ (bekannt aus Teilaufgabe 1.3)

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1=-0,59$ wird in $C_n\left(x \quad |2\cdot\log_3(x+3)+2\right)$ eingesetzt um die Koordinaten von C_3 zu bestimmen, da die Punkte M_3 und C_3 die selbe Abszisse x haben.

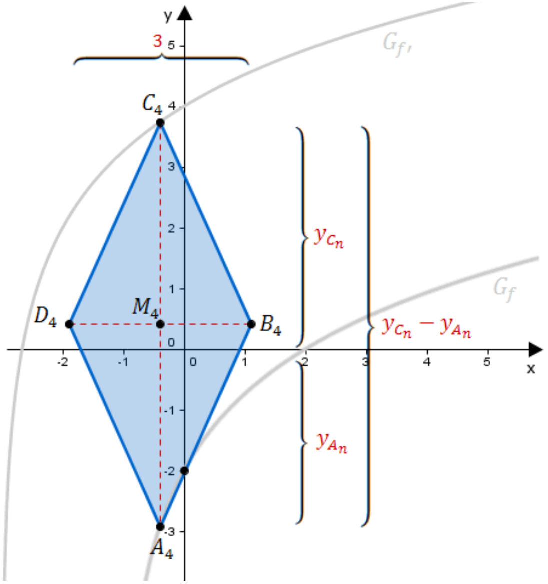
$\Rightarrow \quad C_3(-0,59|3,60)$

Aufgabe A1.6 (3 Punkte)

Die Raute $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ hat den Flächeninhalt 10 FE.
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes C_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Lösung zu Aufgabe A1.6

Länge eines Vektors



Aus Teilaufgabe 1.3 sind bekannt:

$$A_n\left(x \quad |2\cdot\log_3(x+1)-2\right)\ ;\ C_n\left(x \quad |2\cdot\log_3(x+3)+2\right)$$

Länge der Strecke $[A_n\,C_n]$ (Länge der Diagonale) bestimmen:

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Da die Punkte A_n und C_n die selbe Abszisse x haben, ist die Länge der Strecke $[A_n\,C_n]$ gleich der Differenz der y-Werte.
> Man nimmt die y-Koordinate des höher gelegenen Punktes minus die y-Koordinate des anderen Punktes.

$$\overline{A_n\,C_n} = \underbrace{2\cdot\log_3(x+3)+2}_{y_{C_n}} - \underbrace{[2\cdot\log_3(x+1)-2]}_{y_{A_n}}$$

$$\overline{A_n\,C_n} = 2\cdot\log_3(x+3) - 2\cdot\log_3(x+1) + \overbrace{2+2}^{4}$$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Der gemeinsame Faktor 2 wird ausgeklammert.

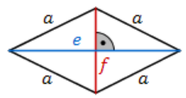
$$\overline{A_n\,C_n} = 2\cdot[\log_3(x+3)-\log_3(x+1)]+4$$

> Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*
>
> $$\log_a\left(\frac{s}{t}\right) = \log_a(s) - \log_a(t)$$

$$\overline{A_n\,C_n} = 2\cdot\log_3\left(\frac{x+3}{x+1}\right)+4$$

Flächeninhalt einer Raute

$A_{A_4\,B_4\,C_4\,D_4} = 10$ FE

> Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*
>
> 
>
>
> Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:
>
> $$A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot f$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{B_4\,D_4}\cdot\overline{A_4\,C_4} = 10$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Aus Teilaufgabe 1.3 ist bekannt: $\overline{B_n\,D_n} = 3$ LE

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left[2 \cdot \log_3\left(\frac{x+3}{x+1}\right) + 4\right] = 10 \quad | \quad$ Klammer auslösen

$3 \cdot \log_3\left(\frac{x+3}{x+1}\right) + 6 = 10 \quad | \quad -6$

$3 \cdot \log_3\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = 4 \quad | \quad \cdot\frac{1}{3}$

$\log_3\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \frac{4}{3} \quad | \quad$ entlogarithmieren

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_3$ kann durch die Exponentialfunktion 3^x aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_3 x = \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 3^{\log_3 x} = 3^{\frac{4}{3}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3^{\frac{4}{3}}$

$\frac{x+3}{x+1} = 3^{\frac{4}{3}} \quad | \quad \cdot(x+1)$

$x + 3 = 3^{\frac{4}{3}} \cdot (x+1)$

$x + 3 = 3^{\frac{4}{3}} \cdot x + 3^{\frac{4}{3}} \quad | \quad -3 - 3^{\frac{4}{3}} \cdot x$

$x - 3^{\frac{4}{3}} \cdot x = 3^{\frac{4}{3}} - 3 \quad | \quad x$ ausklammern

$x \cdot \left(1 - 3^{\frac{4}{3}}\right) = 3^{\frac{4}{3}} - 3 \quad | \quad : \left(1 - 3^{\frac{4}{3}}\right)$

$x = \frac{3^{\frac{4}{3}} - 3}{1 - 3^{\frac{4}{3}}}$

$\Rightarrow \quad x_{C_3} \approx -0,40$