Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ hat die parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$ mit $\overline{AB} = 16$ cm und $\overline{CD} = 9$ cm. Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist der Punkt E, der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ ist der Punkt F. Es gilt: $\overline{EF} = 7$ cm.
Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt E liegt. Es gilt: $\overline{ES} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Punkte E und F auf der Schrägbildachse liegen sollen.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SFE und die Länge der Strecke $[SF]$.
[Ergebnisse: $\varphi = 55,01°$; $\overline{SF} = 12,21$ cm]

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Punkte M_n liegen auf der Strecke $[SF]$. Die Punkte M_n sind die Mittelpunkte der Trapezseiten $[P_nQ_n]$ von Trapezen DCQ_nP_n mit $P_n \in [AS]$ und $Q_n \in [BS]$. Die Winkel FEM_n haben das Maß ε mit $\varepsilon \in [0°, 90°[$.
Zeichnen Sie das Trapez DCQ_1P_1 für $\varepsilon = 65°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[SM_n]$ in Abhängigkeit von ε gilt:
$\overline{SM_n}(\varepsilon) = \dfrac{10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$ cm.

Aufgabe A2.5 (5 Punkte)

Das Trapez DCQ_2P_2 ist ein Rechteck.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε.
[Teilergebnis: $\overline{P_nQ_n}(\varepsilon) = \dfrac{13,10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$ cm]

Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Unter den Höhen $[EM_n]$ der Trapeze DCQ_nP_n hat die Höhe $[EM_0]$ des Trapezes DCQ_0P_0 die minimale Länge.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε.
Ermitteln Sie sodann durch Rechnung, in welchem Verhältnis das Volumen der Pyramide $ABCDS$ durch die von den Eckpunkten des Trapezes DCQ_0P_0 festgelegte Ebene geteilt wird.

Lösung

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ hat die parallelen Seiten $[AB]$ und $[CD]$ mit $\overline{AB} = 16$ cm und $\overline{CD} = 9$ cm . Der Mittelpunkt der Seite $[CD]$ ist der Punkt E, der Mittelpunkt der Seite $[AB]$ ist der Punkt F. Es gilt: $\overline{EF} = 7$ cm .
Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Punkt E liegt. Es gilt: $\overline{ES} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Punkte E und F auf der Schrägbildachse liegen sollen.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.

Lösung zu Aufgabe A2.1

Skizze

$\overline{EF} = 7$ cm ; $\overline{ES} = 10$ cm

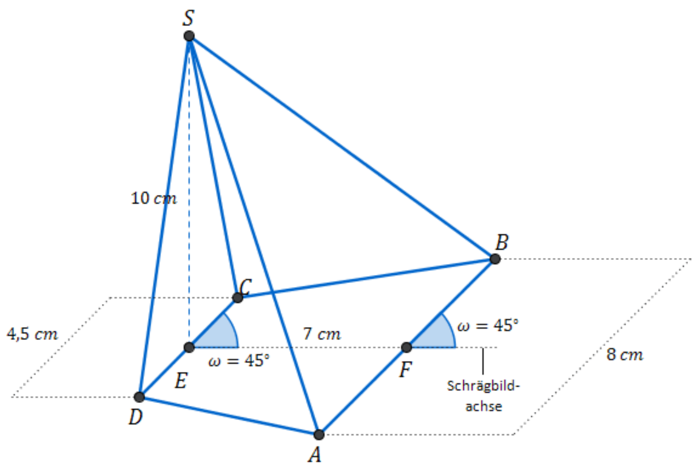
$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Seiten $[AB]$ und $[CD]$ im Schrägbild.

Für die Länge der Grundseiten im Schrägbild gilt somit:

$$\overline{AB} = 16 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \cdot q = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ cm}$$

$$\overline{CD} = 9 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} \cdot q = 9 \cdot \frac{1}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

Winkel der Grundseiten zur Schrägbildachse ist $\omega = 45°$.

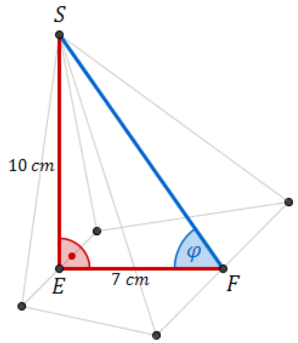


Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SFE und die Länge der Strecke $[SF]$.
[Ergebnisse: $\varphi = 55,01°$; $\overline{SF} = 12,21$ cm]

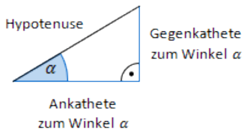
Lösung zu Aufgabe A2.2

Winkel bestimmen



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck EFS. In diesem gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\varphi = \frac{\overline{ES}}{\overline{EF}}$$

$$\tan\varphi = \frac{10}{7}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan\varphi = \frac{10}{7}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{10}{7}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{10}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi \approx 55{,}01^\circ$$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Satz des Pythagoras im Dreieck EFS anwenden:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{SF}^2 = \overline{ES}^2 + \overline{EF}^2$$

$$\overline{SF}^2 = 10^2 + 7^2$$

$$\overline{SF} = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}\ \text{cm}$$

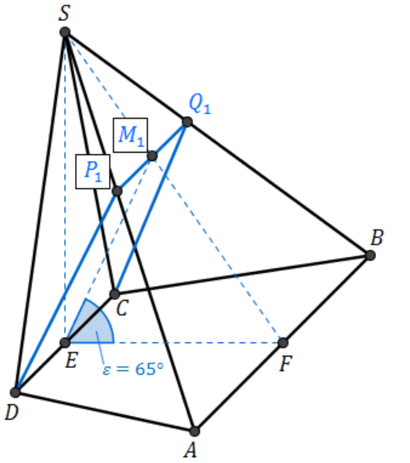
$$\Rightarrow \quad \overline{SF} \approx 12{,}21\ \text{cm}$$

Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

Punkte M_n liegen auf der Strecke $[SF]$. Die Punkte M_n sind die Mittelpunkte der Trapezseiten $[P_nQ_n]$ von Trapezen DCQ_nP_n mit $P_n \in [AS]$ und $Q_n \in [BS]$. Die Winkel FEM_n haben das Maß ε mit $\varepsilon \in [0^\circ, 90^\circ[$.
Zeichnen Sie das Trapez DCQ_1P_1 für $\varepsilon = 65^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



Erläuterung: *Erläuterung*

Der Punkt M_1 wird als erster eingezeichnet. Dafür bildet man im Punkt E einen Winkel von $\varepsilon = 65°$ mit der Strecke $[E F]$.

Die Punkte P_1 und Q_1 sind dann die Schnittpunkte einer Geraden die parallel zur Strecke $[A B]$ und durch M_1 verläuft.

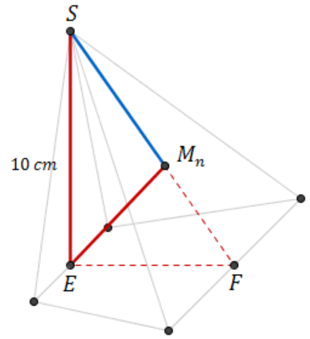
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

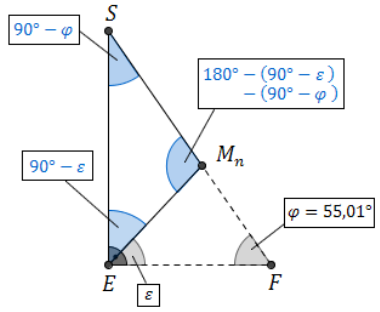
Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken $[S M_n]$ in Abhängigkeit von ε gilt:

$\overline{S M_n}(\varepsilon) = \dfrac{10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55{,}01° + \varepsilon)}$ cm.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Seite eines Dreiecks bestimmen





Betrachtet wird das Dreieck $S M_n E$, dass im rechtwinkligen Dreieck $E F S$ enhalten ist.

Es gilt:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Winkel $\measuredangle F E S$ ist gleich $90°$.

$\measuredangle M_n E S = 90° - \varepsilon$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Im Dreieck $E F S$ gilt somit: $\measuredangle E S F + 90° + \varphi = 180°$

$\measuredangle E S F = 180° - 90° - \varphi = 90° - \varphi$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

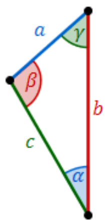
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Im Dreieck $S M_n E$ gilt somit: $\measuredangle S M_n E + (90° - \varepsilon) + (90° - \varphi) = 180°$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle S\,M_n\,E = 180^\circ - (90^\circ - \varepsilon) - (90^\circ - \varphi) = \varphi + \varepsilon$$

Länge der Strecke $[S\,M_n]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $S\,M_n\,E$ gilt somit:

$$\frac{\overline{S\,M_n}}{\sin\measuredangle M_n\,E\,S} = \frac{\overline{E\,S}}{\sin\measuredangle S\,M_n\,E} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{S\,M_n}}{\overline{E\,S}} = \frac{\sin\measuredangle M_n\,E\,S}{\sin\measuredangle S\,M_n\,E}$$

$$\frac{\overline{S\,M_n}}{\overline{E\,S}} = \frac{\sin\measuredangle M_n\,E\,S}{\sin\measuredangle S\,M_n\,E}$$

$$\frac{\overline{S\,M_n}}{10} = \frac{\sin(90^\circ - \varepsilon)}{\sin(\varphi + \varepsilon)} \quad | \quad \cdot 10$$

$$\overline{S\,M_n} = \frac{10 \cdot \sin(90^\circ - \varepsilon)}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$$

Erläuterung: *Komplementbeziehung*

Für einen Winkel α gilt stets die Komplementbeziehung:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

Folgt auch über das Additionstheorem:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \underbrace{\sin 90^\circ}_{1} \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \underbrace{\cos 90^\circ}_{0} = \cos\alpha$$

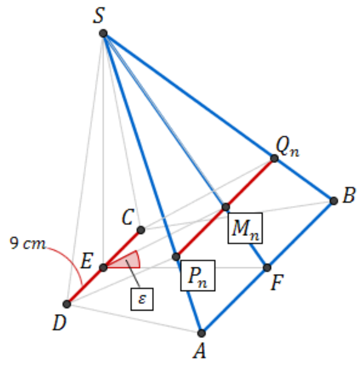
$$\Rightarrow \quad \overline{S\,M_n} = \frac{10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)} \text{ cm}$$

Aufgabe A2.5 (5 Punkte)

Das Trapez $D\,C\,Q_2\,P_2$ ist ein Rechteck.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε.
[Teilergebnis: $\overline{P_n\,Q_n}(\varepsilon) = \dfrac{13,10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01^\circ + \varepsilon)}$ cm]

Lösung zu Aufgabe A2.5

Seite eines Dreiecks bestimmen

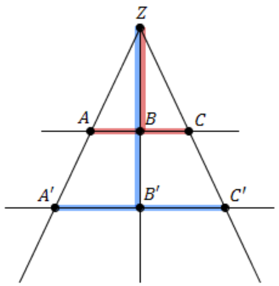


Betrachtet werden die Dreiecke ABS und $P_n Q_n S$ mit $\overline{AB} = 16$ cm , $\overline{SF} = 12,21$ cm und $\overline{SM_n} = \dfrac{10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$ cm.

Mit dem Vierstreckensatz wird die Länge der Strecke $[P_n Q_n]$ bestimmt:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

In diesem Fall gilt also:

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}}$$

Erläuterung: *Rechenweg*

$$\frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}} = \frac{1}{\overline{SF}} \cdot \overline{SM_n} = \frac{1}{12,21} \cdot \frac{10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SF}}$$

$$\frac{\overline{P_n Q_n}}{16} = \frac{10 \cdot \cos\varepsilon}{12,21 \cdot \sin(55,01° + \varepsilon)} \qquad | \quad \cdot 16$$

$$\overline{P_n Q_n} = \frac{16 \cdot 10 \cdot \cos\varepsilon}{12,21 \cdot \sin(55,01° + \varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{P_n Q_n} \approx \frac{13,10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$$

Winkel bestimmen

Das Trapez DCQ_2P_2 ist ein Rechteck.

Es muss also gelten: $\overline{DC} = \overline{P_2Q_2}$

$$\underbrace{9}_{\overline{DC}} = \underbrace{\frac{13,10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}}_{\overline{P_n Q_n}} \qquad | \quad \cdot\sin(55,01° + \varepsilon)$$

$$9 \cdot \sin(55,01° + \varepsilon) = 13,10 \cdot \cos\varepsilon \qquad | \quad \text{Additionstheorem anwenden}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$9 \cdot (\sin 55,01° \cdot \cos\varepsilon + \cos 55,01° \cdot \sin\varepsilon) = 13,10 \cdot \cos\varepsilon \qquad | \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$9 \cdot \sin 55,01° \cdot \cos\varepsilon + 9 \cdot \cos 55,01° \cdot \sin\varepsilon = 13,10 \cdot \cos\varepsilon \qquad | \quad -9\sin 55,01° \cdot \cos\varepsilon$$

$$9 \cdot \cos 55,01° \cdot \sin\varepsilon = 13,10 \cdot \cos\varepsilon - 9\sin 55,01° \cdot \cos\varepsilon \qquad | \quad \cos\varepsilon \text{ ausklammern}$$

Erläuterung: *Teilen*

Für den Winkel ε gilt: $\varepsilon \in [0°; 90°[$ (siehe Teilaufgabe 2.3)

Somit ist $\cos\varepsilon \neq 0$ und die Gleichung darf durch $\cos\varepsilon$ geteilt werden.

$$9 \cdot \cos 55{,}01° \cdot \sin\varepsilon = \cos\varepsilon \cdot (13{,}10 - 9\sin 55{,}01°) \qquad | \quad : \underbrace{(\cos\varepsilon)}_{\neq 0}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$9 \cdot \cos 55{,}01° \cdot \underbrace{\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}}_{\tan\varepsilon} = 13{,}10 - 9\sin 55{,}01° \qquad | \quad : (9 \cdot \cos 55{,}01°)$$

$$\tan\varepsilon = \frac{13{,}10 - 9\sin 55{,}01°}{9 \cdot \cos 55{,}01°}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel ε aus $\tan\varepsilon = \frac{13{,}10 - 9\sin 55{,}01°}{9 \cdot \cos 55{,}01°}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{13{,}10 - 9\sin 55{,}01°}{9 \cdot \cos 55{,}01°}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{13{,}10 - 9\sin 55{,}01°}{9 \cdot \cos 55{,}01°}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \approx 47{,}97°$$

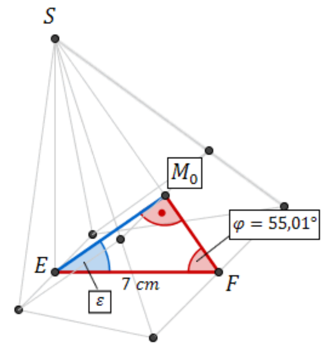
Aufgabe A2.6 (4 Punkte)

Unter den Höhen $[E\,M_n]$ der Trapeze $D\,C\,Q_n\,P_n$ hat die Höhe $[E\,M_0]$ des Trapezes $D\,C\,Q_0\,P_0$ die minimale Länge.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß ε.
Ermitteln Sie sodann durch Rechnung, in welchem Verhältnis das Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ durch die von den Eckpunkten des Trapezes $D\,C\,Q_0\,P_0$ festgelegte Ebene geteilt wird.

Lösung zu Aufgabe A2.6

Winkel bestimmen



Betrachtet wird das Dreieck $E\,F\,M_0$.

$[E\,M_0]$ hat minimale Länge, wenn $[E\,M_0]$ senkrecht zu $[S\,F]$ ist. Also wenn das Dreieck $E\,F\,M_0$ rechtwinklig ist.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

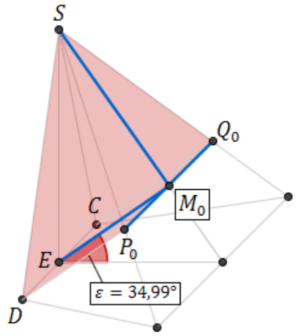
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180°.

Im Dreieck $E\,F\,M_0$ gilt somit: $\varepsilon + 90° + \varphi = 180°$

$$\varepsilon = 180° - 90° - 55{,}01°$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = 34{,}99°$$

Seite eines Dreiecks bestimmen



Nebenrechnungen (Seiten der Pyramide $D\,C\,Q_0\,P_0\,S$):

Aus Teilaufgabe 2.5 ist bekannt: $\overline{P_n\,Q_n}(\varepsilon) = \dfrac{13,10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$ cm

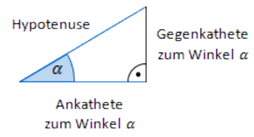
$$\Rightarrow \quad \overline{P_0\,Q_0} = \frac{13,10 \cdot \cos 34,99°}{\sin(55,01° + 34,99°)} \approx 10,73 \text{ cm}$$

Aus Teilaufgabe 2.4 ist bekannt: $\overline{S\,M_n}(\varepsilon) = \dfrac{10 \cdot \cos\varepsilon}{\sin(55,01° + \varepsilon)}$ cm

$$\Rightarrow \quad \overline{S\,M_0} = \frac{10 \cdot \cos 34,99°}{\sin(55,01° + 34,99°)} \approx 8,19 \text{ cm}$$

Im rechtwinkligem Dreieck $E\,F\,M_0$ gilt:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

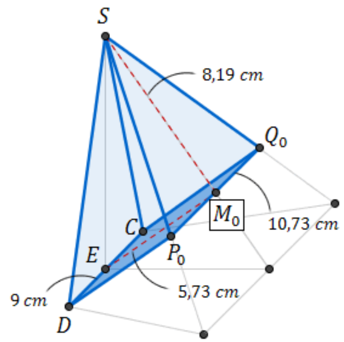
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos\varepsilon = \frac{\overline{E\,M_0}}{\overline{E\,F}} \qquad | \quad \cdot\overline{E\,F}$$

$$\overline{E\,M_0} = \cos\varepsilon \cdot \overline{E\,F}$$

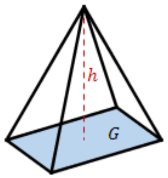
$$\Rightarrow \quad \overline{E\,M_0} = \cos 34,99° \cdot 7 \approx 5,73 \text{ cm}$$

Volumen einer Pyramide



Volumen der Pyramide $D\,C\,Q_0\,P_0\,S$:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*

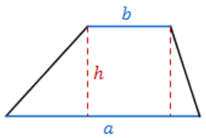


Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{D\,C\,Q_0\,P_0\,S} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

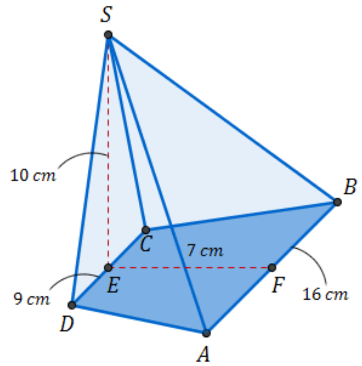
$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Die Grundseite der Pyramide $C\,D\,P_0\,Q_0\,S$ ist das Trapez $C\,D\,P_0\,Q_0$ mit den Grundseiten $[C\,D]$ und $[P_0\,Q_0]$ und der Höhe $[E\,M_0]$.

$$V_{D\,C\,Q_0\,P_0\,S} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (\overline{P_0\,Q_0} + \overline{C\,D}) \cdot \overline{E\,M_0}\right]}_{G} \cdot \underbrace{\overline{S\,M_0}}_{h}$$

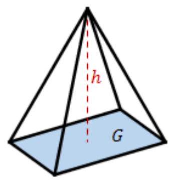
$$V_{D\,C\,Q_0\,P_0\,S} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (10,73 + 9) \cdot 5,73\right] \cdot 8,19 \ \text{cm}^3$$

$$\Rightarrow \quad V_{D\,C\,Q_0\,P_0\,S} \approx 154,31 \ \text{cm}^3$$



Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*

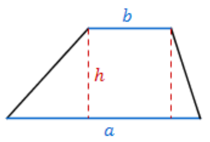


Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$V_{A\,B\,C\,D\,S} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Trapezes*



Ein Trapez mit den Grundseiten a und b und der Höhe h hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

Die Grundseite der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ ist das Trapez $A\,B\,C\,D$ mit den Grundseiten $[A\,B]$ und $[C\,D]$ und der Höhe $[E\,F]$.

$$V_{A\,B\,C\,D\,S} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (\overline{A\,B} + \overline{C\,D}) \cdot \overline{E\,F}\right]}_{G} \cdot \underbrace{\overline{E\,S}}_{h}$$

$$V_{A\,B\,C\,D\,S} = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (16 + 9) \cdot 7\right] \cdot 10 \text{ cm}^3$$

$\Rightarrow \quad V_{A\,B\,C\,D\,S} \approx 291{,}67 \text{ cm}^3$

Verhältnis der Rauminhalte von Teilkörpern

$$\frac{\overbrace{V_{A\,B\,C\,D\,S} - V_{D\,C\,Q_0\,P_0\,S}}^{\text{Volumen Pyramidenstumpf}}}{V_{D\,C\,Q_0\,P_0\,S}} = \frac{291{,}67 - 154{,}31}{154{,}31} = \frac{137{,}36\,cm}{154{,}31\,cm}$$

$\Rightarrow$ Das Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ wird in einem Verhältnis von ca. 154 : 137 geteilt.