# Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe B2

**Aufgabe B2.**

Die Raute $A\,B\,C\,D$ mit den Diagonalen $[A\,C]$ und $[B\,D]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$, deren Spitze $S$ senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt $M$ der Raute $A\,B\,C\,D$ liegt.
Es gilt: $\overline{A\,C} = 14$ cm ; $\overline{B\,D} = 10$ cm; $\overline{M\,S} = 5$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

**Aufgabe B2.1** (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$, wobei die Diagonale $[A\,C]$ auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$ ; $\omega = 45°$.

**Aufgabe B2.2** (3 Punkte)

Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante $[C\,S]$ über den Punkt $S$ hinaus liegen Punkte $E_n$. Die Punkte $E_n$ sind die Spitzen von Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ mit den Höhen $[E_n\,F_n]$, deren Fußpunkte $F_n$ auf der Halbgeraden $[M\,A$ liegen. Die Strecken $[M\,S]$ und $[M\,E_n]$ schließen Winkel $S\,M\,E_n$ mit dem Maß $\varphi$ ein.
Zeichnen Sie die Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_1$ für $\varphi = 30°$ und ihre Höhe $[E_1\,F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Für alle Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ gilt: $\varphi \in ]0°; 54,46°[$.
Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

**Aufgabe B2.3** (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[M\,E_n]$ in Abhängigkeit von $\varphi$ gilt:
$\overline{M\,E_n}(\varphi) = \dfrac{4,07}{\sin\,(125,54° + \varphi)}$ cm.

**Aufgabe B2.4** (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen $V$ der Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ in Abhängigkeit von $\varphi$.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \dfrac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin\,(125,54° + \varphi)}$ cm$^3$]

**Aufgabe B2.5** (3 Punkte)

Die Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_2$ hat das Volumen 210 cm$^3$.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß $\varphi$.





**Aufgabe B2.6** (3 Punkte)

Die Spitze $E_0$ der Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_0$ liegt senkrecht über dem Punkt $A$.
Berechnen Sie das Maß $\varphi$ des Winkels $S\,M\,E_0$.

© Realschulrep.de

# Lösung

## Aufgabe B2.

Die Raute $A\,B\,C\,D$ mit den Diagonalen $[A\,C]$ und $[B\,D]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$, deren Spitze $S$ senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt $M$ der Raute $A\,B\,C\,D$ liegt.
Es gilt: $\overline{A\,C} = 14$ cm ; $\overline{B\,D} = 10$ cm; $\overline{M\,S} = 5$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$, wobei die Diagonale $[A\,C]$ auf der Schrägbildachse liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$ ; $\omega = 45°$.

### Lösung zu Aufgabe B2.1

***Skizze***

$\overline{A\,C} = 14$ cm ; $\overline{B\,D} = 10$ cm ; $\overline{M\,S} = 5$ cm

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale $[B\,D]$ im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonale im Schrägbild gilt somit:

$\overline{B\,D} = 10$ cm $\quad \Rightarrow \quad \overline{B\,D} \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

Winkel der Diagonale zur Schrägbildachse ist $\omega = 45°$.

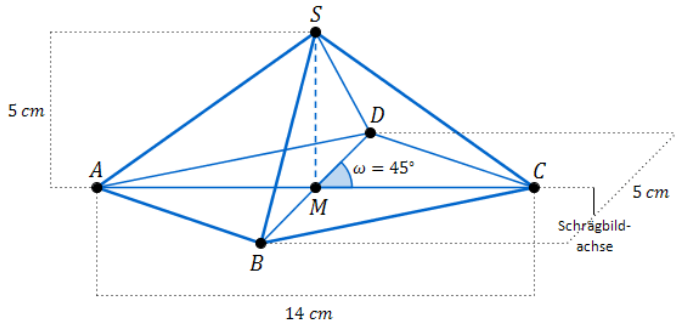
Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Die Grundfläche $A\,B\,C\,D$ der Pyramide ist eine Raute.

Da sich sich die Diagonalen einer Raute halbieren, muss der Mittelpunkt $M$ der Strecke $[A\,C]$ ermittelt werden, bevor die Strecke $[B\,D]$ eingezeichnet werden kann.








## Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

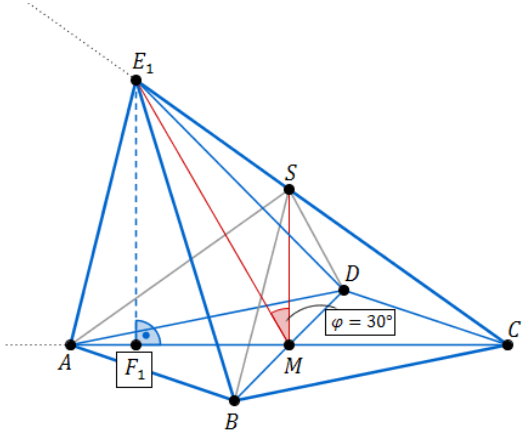
Auf der geradlinigen Verlängerung der Kante $[C\,S]$ über den Punkt $S$ hinaus liegen Punkte $E_n$. Die Punkte $E_n$ sind die Spitzen von Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ mit den Höhen $[E_n\,F_n]$, deren Fußpunkte $F_n$ auf der Halbgeraden $[M\,A$ liegen. Die Strecken $[M\,S]$ und $[M\,E_n]$ schließen Winkel $S\,M\,E_n$ mit dem Maß $\varphi$ ein.
Zeichnen Sie die Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_1$ für $\varphi = 30°$ und ihre Höhe $[E_1\,F_1]$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.
Für alle Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ gilt: $\varphi \in ]0°; 54,46°[$.
Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

### Lösung zu Aufgabe B2.2

***Skizze***

$A\,B\,C\,D\,E_1$ für $\varphi = 30°$ :

© Realschulrep.de




***Winkel bestimmen***

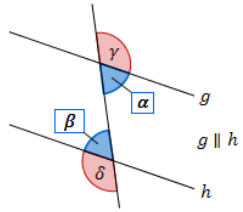
**Überlegung**:

Wenn $[M\,E_n]$ parallel zu $[C\,S]$ wäre, dann würde es keine Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_n$ geben.





Erläuterung: *Wechselwinkel / Z-Winkel*

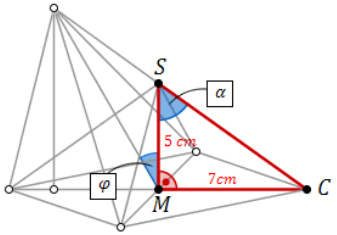



Werden zwei parallele Geraden $g$ und $h$ von einer dritten Geraden geschnitten, so gelten für die Wechselwinkel folgende Beziehungen:

$\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$

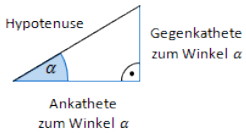
Wenn $[M\,E_n]$ parallel zu $[C\,S]$ wäre, dann würden die Wechselwinkel $\varphi$ und $\underbrace{\sphericalangle M\,S\,C}_{\alpha}$ gleich sein.

Das ist der Fall wenn $\varphi = \underbrace{\sphericalangle M\,S\,C}_{\alpha}$.




Im rechtwinkligen Dreieck $S\,M\,C$ gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*




Der Tangens eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{MS}} = \frac{7}{5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\alpha$ aus $\tan\alpha = \frac{7}{5}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{7}{5}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{5}\right) \approx 54,46^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = ]0;\alpha[ = ]0;54,46^\circ[$$

**Aufgabe B2.3** (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[M\,E_n]$ in Abhängigkeit von $\varphi$ gilt:

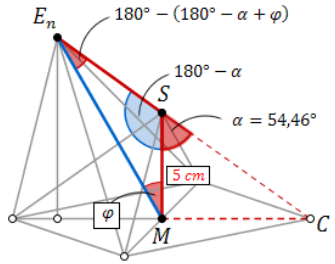
$$\overline{M\,E_n}(\varphi) = \frac{4,07}{\sin\,(125,54^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe B2.3

***Seite eines Dreiecks bestimmen***



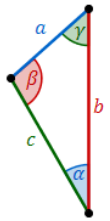





Betrachtet wird das Dreieck $E_n\,M\,S$.

Nach dem Sinussatz gilt:

Erläuterung: *Sinussatz*




In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $E_n\,M\,S$ gilt somit: $\frac{\overline{M\,E_n}}{\overline{M\,S}} = \frac{\sin\angle E_n\,S\,M}{\sin\angle M\,E_n\,S}$

© Realschulrep.de

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{\overline{M\,S}} = \frac{\sin\measuredangle E_n\,S\,M}{\sin\measuredangle M\,E_n\,S}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Im Dreieck $E_n\,M\,S$ gilt somit: $\measuredangle M\,E_n\,S + \measuredangle E_n\,S\,M + \varphi = 180°$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{5} = \frac{\sin\,(180° - \alpha)}{\sin(180° - (180° - \alpha + \varphi))}$$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{5} = \frac{\sin\,(125,54°)}{\sin(180° - (125,54° + \varphi))}$$

Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

| | $90° \pm \alpha$ | $180° \pm \alpha$ | $270° \pm \alpha$ | $360° \pm \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| **sin** | $\cos\alpha$ | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ |
| **cos** | $\mp\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $\pm\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |

Hier: $\sin(180° - \underbrace{(125,54° + \varphi)}_{\alpha}) = \sin(125,54° + \varphi)$

$$\frac{\overline{M\,E_n}}{5} = \frac{\sin\,(125,54°)}{\sin(125,54° + \varphi)} \quad | \quad \cdot 5$$

$$\overline{M\,E_n} = \frac{5 \cdot \sin\,(125,54°)}{\sin(125,54° + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{M\,E_n}(\varphi) \approx \frac{4,07}{\sin(125,54° + \varphi)}\ \text{cm}$$

**Aufgabe B2.4** (3 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch das Volumen $V$ der Pyramiden $A\,B\,C\,D\,E_n$ in Abhängigkeit von $\varphi$.



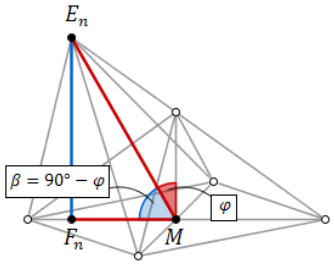


[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin\,(125,54° + \varphi)}\ \text{cm}^3$]

**Lösung zu Aufgabe B2.4**

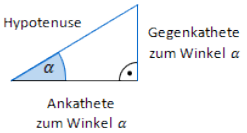
***Seite eines Dreiecks bestimmen***

Nebenrechnung: Höhe $[E_n\,F_n]$ der Pyramide bestimmen




Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $F_n\,M\,E_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*




Der Sinus eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\underbrace{\measuredangle E_n\,M\,F_n}_{\beta} = \frac{\overline{E_n\,F_n}}{\overline{M\,E_n}} \quad | \quad \cdot\,\overline{M\,E_n}$$

$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin \beta$

$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \sin(90° - \varphi)$

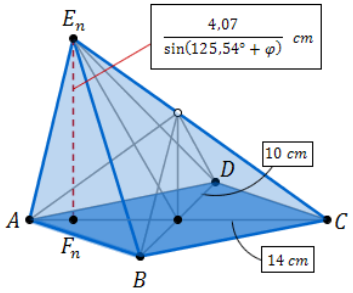
Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

| | $90° \pm \alpha$ | $180° \pm \alpha$ | $270° \pm \alpha$ | $360° \pm \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| **sin** | $\cos \alpha$ | $\mp \sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm \sin \alpha$ |
| **cos** | $\mp \sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm \sin \alpha$ | $\cos \alpha$ |

$\Rightarrow \quad \sin(90° - \varphi) = \cos(\varphi)$

$\overline{E_n F_n} = \overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)$

***Volumen einer Pyramide***

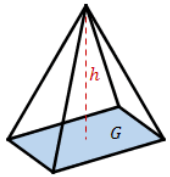



Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_n$:





Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



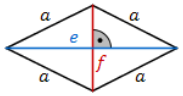

Eine Pyramide mit Grundfläche $G$ und Höhe $h$ hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V_{A\,B\,C\,D\,E_n} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*

Die Grundfläche $A\,B\,C\,D$ ist eine Raute.




Eine Raute mit Diagonalen $e$ und $f$ hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$V_{A\,B\,C\,D\,E_n} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{B\,D}}_{G} \cdot \underbrace{\overline{E_n F_n}}_{h}$

$V_{A\,B\,C\,D\,E_n} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{B\,D}}_{G} \cdot \underbrace{\overline{M E_n} \cdot \cos(\varphi)}_{h}$

© Realschulrep.de

$$V_{A\,B\,C\,D\,E_n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 10 \cdot \frac{4,07}{\sin(125,54° + \varphi)} \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow \quad V_{A\,B\,C\,D\,E_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54° + \varphi)} \text{ cm}^3$$

**Aufgabe B2.5** (3 Punkte)

Die Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_2$ hat das Volumen 210 cm$^3$.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß $\varphi$.

**Lösung zu Aufgabe B2.5**

***Winkel bestimmen***

Aus Teilaufgabe 2.4: $V_{A\,B\,C\,D\,E_n} \approx \frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54°) + \varphi}$ cm$^3$

Für die Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_2$ gilt somit:

$$\frac{94,97 \cdot \cos\varphi}{\sin(125,54° + \varphi)} = 210 \quad | \quad \cdot\sin(125,54° + \varphi)$$

$94,97 \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin(125,54° + \varphi)$ | Additionstheorem anwenden

Erläuterung: *Additionstheorem*

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$94,97 \cdot \cos\varphi = 210 \cdot [\sin(125,54°) \cdot \cos\varphi + \sin\varphi \cdot \cos(125,54°)]$





Erläuterung: *Ausmultiplizieren*

Die rechte Seite der Gleichung wird ausmultipliziert.

$94,97 \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin(125,54°) \cdot \cos\varphi + 210 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(125,54°)$

Erläuterung: *Rechenweg*

Der Term $210 \cdot \sin(125,54°) \cdot \cos\varphi$ wird auf die linke Seite der Gleichung gebracht.

$94,97 \cdot \cos\varphi - 210 \cdot \sin(125,54°) \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(125,54°)$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der gemeinsame Term $\cos\varphi$ auf der linken Seite der Gleichung wird ausgeklammert.

$[94,97 - 210 \cdot \sin(125,54°)] \cdot \cos\varphi = 210 \cdot \sin\varphi \cdot \cos(125,54°) \quad | \quad : \underbrace{(\cos\varphi)}_{\neq 0}$

Erläuterung: *Teilen*

Für den Winkel $\varphi$ gilt: $\varphi \in ]0°; 54,56°[$ (siehe Teilaufgabe 2.3)

Somit ist $\cos\varphi \neq 0$ und die Gleichung darf durch $\cos\varphi$ geteilt werden.

$$94,97 - 210 \cdot \sin(125,54°) = 210 \cdot \cos(125,54°) \cdot \underbrace{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}_{\tan\varphi} \quad | \quad : \underbrace{(210 \cdot \cos(125,54°))}_{\neq 0}$$

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels $\alpha$ gilt die Beziehung:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\tan\varphi = \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54°)}{210 \cdot \cos(125,54°)}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\varphi$ aus $\tan\varphi = \frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54°)}{210 \cdot \cos(125,54°)}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54°)}{210 \cdot \cos(125,54°)}$ → SHIFT → tan

$$\Rightarrow \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{94,97 - 210 \cdot \sin(125,54°)}{210 \cdot \cos(125,54°)}\right) \approx 31,88°$$

**Aufgabe B2.6** (3 Punkte)

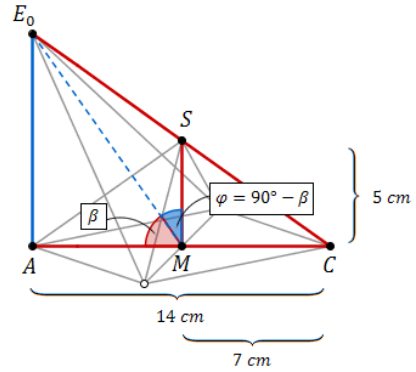
Die Spitze $E_0$ der Pyramide $A\,B\,C\,D\,E_0$ liegt senkrecht über dem Punkt $A$. Berechnen Sie das Maß $\varphi$ des Winkels $S\,M\,E_0$.

**Lösung zu Aufgabe B2.6**

***Seite eines Dreiecks bestimmen***





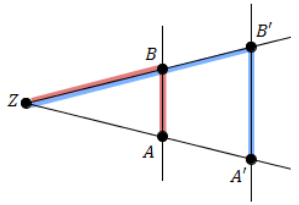



Betrachtet werden die Dreiecke $E_0\,A\,C$ und $S\,M\,C$.

Laut Vierstreckensatz gilt:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:




$$\frac{\overline{Z\,B}}{\overline{Z\,B'}} = \frac{\overline{A\,B}}{\overline{A'\,B'}}$$

$$\frac{\overline{C\,M}}{\overline{C\,A}} = \frac{\overline{S\,M}}{\overline{A\,E_0}}$$

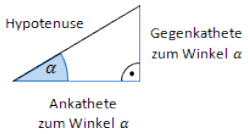
$$\frac{7}{14} = \frac{5}{\overline{A\,E_0}} \quad | \quad \cdot\left(\overline{A\,E_0} \cdot \frac{14}{7}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{A\,E_0} = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10 \text{ cm}$$

***Winkel bestimmen***

Im rechtwinkligen Dreieck $E_0\,A\,M$ gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*




Der Tangens eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\beta = \frac{\overline{A\,E_0}}{\overline{A\,M}} = \frac{10}{7}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\beta$ aus $\tan\beta = \frac{10}{7}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{10}{7}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{7}\right) \approx 55,01^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - \beta$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 90^\circ - 55,01^\circ = 34,99^\circ$$