Mittlere-Reife-Prüfung 2008 Mathematik I Aufgabe P1

Aufgabe P1.

Lässt man einen Gummiball aus einer Höhe von $100,0$ cm frei fallen, so verliert er nach jedem Auftreffen am Boden an Sprunghöhe. Die Tabelle zeigt die maximale Sprunghöhe, die der Ball nach dem x-ten Bodenkontakt erreicht.

Anzahl der Bodenkontakte	0	1	2	3
Maximale Sprunghöhe in cm	100,0	80,0	64,0	51,2

Aufgabe P1.1 (1 Punkt)

Geben Sie an, um wie viel Prozent die maximale Sprunghöhe nach jedem Aufprall abnimmt.

Aufgabe P1.2 (1 Punkt)

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bodenkontakte x und der maximalen Sprunghöhe y cm kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschrieben werden ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$; $y_0 \in \mathbb{R}^+$; $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).
Geben Sie die Funktionsgleichung an.

Aufgabe P1.3 (1 Punkt)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Anzahl der Bodenkontakte, nach der die maximale Sprunghöhe erstmals weniger als $30,0$ cm beträgt.

Aufgabe P1.4 (2 Punkte)

Berechnen Sie auf Millimeter gerundet, welche Gesamtstrecke der Ball zurückgelegt hat, wenn er nach dem vierten Bodenkontakt gerade die maximale Sprunghöhe erreicht.

Lösung

Aufgabe P1.

Lässt man einen Gummiball aus einer Höhe von $100,0$ cm frei fallen, so verliert er nach jedem Auftreffen am Boden an Sprunghöhe. Die Tabelle zeigt die maximale Sprunghöhe, die der Ball nach dem x-ten Bodenkontakt erreicht.

Anzahl der Bodenkontakte	0	1	2	3
Maximale Sprunghöhe in cm	100,0	80,0	64,0	51,2

Aufgabe P1.1 (1 Punkte)

Geben Sie an, um wie viel Prozent die maximale Sprunghöhe nach jedem Aufprall abnimmt.

Lösung zu Aufgabe P1.1

Exponentielles Wachstum

$$\frac{100,0 - 80,0}{100,0} = 0,20 = 20\%$$
$$\frac{80,0 - 64,0}{80,0} = 0,20 = 20\%$$
$$\frac{64,0 - 51,2}{64,0} = 0,20 = 20\%$$

Die Sprunghöhe nimmt nach jedem Aufprall um 20% ab.

Alternative:

$$\frac{100,0 - 80,0}{100,0} = 0,20 = 20\% \quad \Rightarrow \quad k = 1 - 0,20 = 0,8$$

© Realschulrep.de

$80,0 \cdot 0,8 = 64,0$

$64,0 \cdot 0,8 = 51,2$

Aufgabe P1.2 (1 Punkte)

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bodenkontakte x und der maximalen Sprunghöhe y cm kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschrieben werden ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$; $y_0 \in \mathbb{R}^+$; $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).
Geben Sie die Funktionsgleichung an.

Lösung zu Aufgabe P1.2

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

$y = y_0 \cdot k^x$ (Art der Funktion)

$y_0 = 100$ (Starthöhe)

$p = 0,2$ (prozentuale Veränderung, siehe Teilaufgabe 1.2)

Gesucht: Funktionsgleichung

Erläuterung: *Änderungsrate*

Die Änderungsrate k setzt sich (im Falle einer abnehmenden Wachstumsfunktion) zusammen aus $1 - p$, wobei p die prozentuale Veränderung ist.

$k = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$

$\Rightarrow \quad y = 100 \cdot 0,8^x$

Aufgabe P1.3 (1 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die Anzahl der Bodenkontakte, nach der die maximale Sprunghöhe erstmals weniger als $30,0$ cm beträgt.

Lösung zu Aufgabe P1.3

Exponentielles Wachstum

$y = 100 \cdot 0,8^x$ (siehe Teilaufgabe 1.2)

$30,0 = 100 \cdot 0,8^x \quad | \quad : 100$

$0,3 = 0,8^x \quad | \quad \log_{0,8}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0,8^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{0,8}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $0,8^x = 2 \iff \log_{0,8} 0,8^x = \log_{0,8} 2 \iff x = \log_{0,8} 2$

$\log_{0,8} 0,3 = x$

$\Rightarrow \quad x \approx 5,4$

Antwort: Nach dem 6. Bodenkontakt beträgt die maximale Sprunghöhe erstmals weniger als 30 cm.

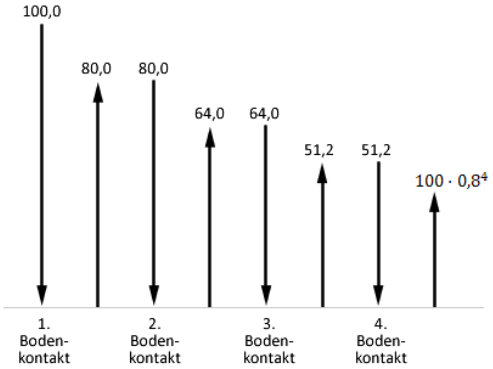
Aufgabe P1.4 (2 Punkte)

Berechnen Sie auf Millimeter gerundet, welche Gesamtstrecke der Ball zurückgelegt hat, wenn er nach dem vierten Bodenkontakt gerade die maximale Sprunghöhe erreicht.

Lösung zu Aufgabe P1.4

Exponentielles Wachstum

© Realschulrep.de



Erläuterung: *Gesamtstrecke*

Die Gesamtstrecke besteht aus der Summe der Strecken die der Ball sowohl vor als auch nach einem Bodenkontakt zurücklegt hat.

Die maximale Sprunghöhe nach dem vierten Bodenkontakt (BK) ist gleich:

$y = 100 \cdot 0,8^x \quad \overset{4.BK}{\Rightarrow} \quad y = 100 \cdot 0,8^4$

$S_{\text{Gesamt}} = 100,0 + 2 \cdot 80,0 + 2 \cdot 64,0 + 2 \cdot 51,2 + 100 \cdot 0,8^4$

$S_{\text{Gesamt}} = 531,36 \text{ cm}$

$\Rightarrow \quad S_{\text{Gesamt}} \approx 531,4 \text{ cm}$ (auf Millimeter gerundet)