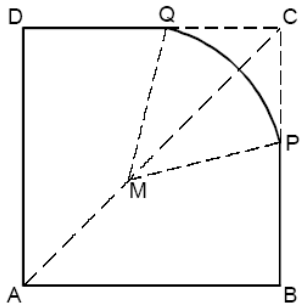
Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer Duschwanne, welcher durch die Strecken $[Q\,D]$, $[D\,A]$, $[A\,B]$ und $[B\,P]$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{A\,B}$ begrenzt wird.
Das Viereck $A\,B\,C\,D$ ist ein Quadrat. Der Punkt M liegt auf der Diagonalen $[A\,C]$ des Vierecks $A\,B\,C\,D$ und ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke $[B\,C]$ im Punkt P und die Strecke $[C\,D]$ im Punkt Q schneidet.
Es gelten folgende Maße: $\overline{A\,B} = 90,0$ cm ; $\overline{B\,P} = \overline{Q\,D} = 50,0$ cm ; $\overline{M\,P} = \overline{M\,Q} = 50,0$ cm.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Maß des Winkels $P\,M\,C$. [Ergebnis: $\measuredangle P\,M\,C = 34,4°$]

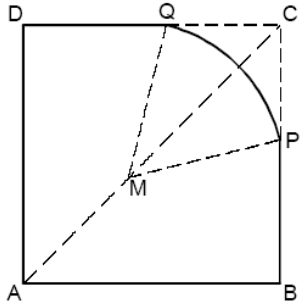
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne.

Lösung

Aufgabe A1.

Die nebenstehende Skizze zeigt den Grundriss einer Duschwanne, welcher durch die Strecken $[Q\,D]$, $[D\,A]$, $[A\,B]$ und $[B\,P]$ sowie den Kreisbogen $\overset{\frown}{A\,B}$ begrenzt wird.
Das Viereck $A\,B\,C\,D$ ist ein Quadrat. Der Punkt M liegt auf der Diagonalen $[A\,C]$ des Vierecks $A\,B\,C\,D$ und ist der Mittelpunkt eines Kreises, der die Strecke $[B\,C]$ im Punkt P und die Strecke $[C\,D]$ im Punkt Q schneidet.
Es gelten folgende Maße: $\overline{A\,B} = 90,0$ cm ; $\overline{B\,P} = \overline{Q\,D} = 50,0$ cm ; $\overline{M\,P} = \overline{M\,Q} = 50,0$ cm.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Maß des Winkels $P\,M\,C$. [Ergebnis: $\measuredangle P\,M\,C = 34,4°$]

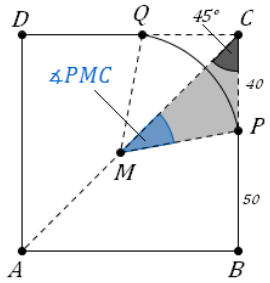
Lösung zu Aufgabe A1.1

Winkel bestimmen

Für diese Aufgabe sind folgende Angaben wichtig: $\overline{A\,B} = \overline{B\,C} = 90,0$ cm, $\overline{B\,P} = 50,0$ cm

Betrachtet wird das Dreieck $M\,P\,C$.

© Realschulrep.de

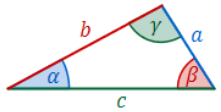


Länge der Seite $[PC]$ bestimmen:

$\overline{PC} = \overline{BC} - \overline{BP} = 90,0 - 50,0 = 40,0$ cm

Maß des Winkels PMC mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Im Dreieck PMC gilt somit: $\frac{\sin\angle PMC}{\overline{PC}} = \frac{\sin\angle MCP}{\overline{MP}}$ $\quad\Longleftrightarrow\quad$ $\frac{\overline{PC}}{\sin\angle PMC} = \frac{\overline{MP}}{\sin\angle MCP}$

$\frac{\sin\angle PMC}{\overline{PC}} = \frac{\sin\angle MCP}{\overline{MP}} \quad | \quad \cdot\overline{PC}$

$\sin\angle PCM = \frac{\sin\angle MCP \cdot \overline{PC}}{\overline{MP}}$

Erläuterung: *Maß des Winkels MCP*

Die Strecke $[AC]$ ist Diagonale des Quadrats $ABCD$ und teilt den 90°-Winkel bei C in zwei 45°-Winkeln. Somit ist $\angle MCP = 45°$.

$\sin\angle PCM = \frac{\sin 45° \cdot 40}{50}$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\angle PCM$ aus $\sin\angle PCM = \frac{\sin 45° \cdot 40}{50}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{\sin 45° \cdot 40}{50}$ → SHIFT → sin

$\Rightarrow \angle PCM = \sin^{-1}\left(\frac{\sin 45° \cdot 40}{50}\right) = 34,4°$

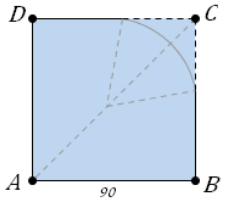
Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Flächeninhalt eines Rechtecks

Gegeben ist die Seite $\overline{AB} = 90$ cm.

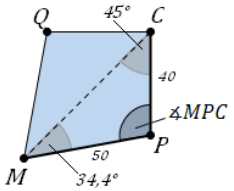


Flächeninhalt des Quadrats $A\,B\,C\,D$ bestimmen:

$A_{A\,B\,C\,D} = \overline{A\,B}^2 = 90^2 \text{ cm}^2$

Flächeninhalt eines Drachenvierecks

Gegeben sind die Länge der Seiten $\overline{M\,P} = 50$ cm und $\overline{P\,C} = 40$ cm und die Winkelmaße $\sphericalangle P\,M\,C = 34,4°$ und $\sphericalangle M\,C\,P = 45°$ (siehe Aufgabe A 1.1)



Maß des Winkels $M\,P\,C$ bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Also hat der Winkel $\sphericalangle M\,P\,C$ eine Größe von $180° - (\sphericalangle P\,M\,C + \sphericalangle M\,C\,P)$.

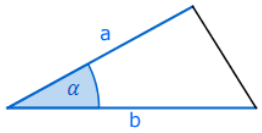
$\sphericalangle M\,P\,C = 180° - (\sphericalangle P\,M\,C + \sphericalangle M\,C\,P)$

$\sphericalangle M\,P\,C = 180° - (34,4° + 45°)$

$\sphericalangle M\,P\,C = 100,6°$

Flächeninhalt des Dreiecks $M\,P\,C$ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck $A\,B\,C$ zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$A_{M\,P\,C} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M\,P} \cdot \overline{P\,C} \cdot \sin\sphericalangle M\,P\,C$

$A_{M\,P\,C} = \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6°$

Flächeninhalt des Drachenvierecks $M\,P\,C\,Q$ bestimmen:

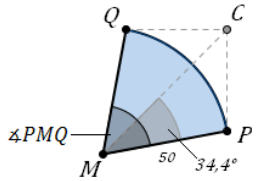
$A_{M\,P\,C\,Q} = 2 \cdot A_{M\,P\,C}$

$A_{M\,P\,C\,Q} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6°$

$A_{M\,P\,C\,Q} = 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6°$

Flächeninhalt eines Kreissektors

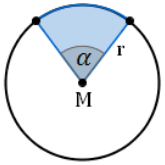
Gegeben ist der Radius $\overline{M\,P} = 50,0$ cm des Kreissektors $M\,P\,Q$ und der Winkel $\sphericalangle P\,M\,C = 34,4°$.



Flächeninhalt des Kreissektors $M\,P\,Q$ bestimmen:

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$

berechnet.

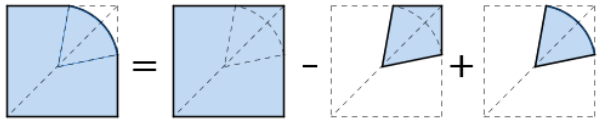
$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360°}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$A_{M\,P\,Q} = \overline{M\,P}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\measuredangle Q\,M\,P}{360°}$

$A_{M\,P\,Q} = 50,0^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 34,4}{360°}$

Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Flächeninhalt A des Grundrisses der Duschwanne bestimmen:

$A = A_{A\,B\,C\,D} - A_{M\,P\,C\,Q} + A_{P\,M\,Q}$

$A = 90^2 - 50,0 \cdot 40,0 \cdot \sin 100,6° + 50,0^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 34,4°}{360°}$

$\Rightarrow \quad A \approx 7635,1 \text{ cm}^2$