Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 14$ hat den Scheitel $S_1(4|-2)$. Die Parabel p_2 besitzt den Scheitel $S_2(6|7)$ und verläuft durch den Punkt $P(9|4,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ b, c \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Aufgabe B1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p_2 in der Scheitelform und bringen Sie die Gleichung in die Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $a \in \mathbb{R}$; $b, c \in \mathbb{R}$. Erstellen Sie sodann für die Parabel p_2 eine Wertetabelle für $x \in [0; 10]$ mit [U+25B5]$x = 1$ und zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leqq x \leqq 11$; $-3 \leqq y \leqq 8$.
[Ergebnis: $p_2 : y = -0,25x^2 + 3x - 2$]

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\ \left(x|x^2 - 8x + 14\right)$ auf der Parabel p_1 und Punkte $B_n\ \left(x|-0,25^2 + 3x - 2\right)$ auf der Parabel p_2 haben dieselbe Abszisse x. Sie sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ mit der Basis $[A_n\,B_n]$, wobei gilt: $y_{A_n} < y_{B_n}$. Die x-Koordinate der Punkte C_n ist um 4 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n.
Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ für $x = 3$ und $A_2\,B_2\,C_2$ für $x = 6,5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung, für welche Belegungen von x es Dreiecke $A_n\,B_n\,C_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ besitzt das Dreieck $A_0\,B_0\,C_0$ den maximalen Flächeninhalt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A_0\,B_0\,C_0$ und geben Sie die Koordinaten des Punktes C_0 an.
[Teilergebnis: $\overline{A_n\,B_n}(x) = (-1,25x^2 + 11x - 16)$ LE]

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Für $x = 4$ ergibt sich das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und begründen Sie, dass das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ rechtwinklig ist.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 14$ hat den Scheitel $S_1(4|-2)$. Die Parabel p_2 besitzt den Scheitel $S_2(6|7)$ und verläuft durch den Punkt $P(9|4,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ b, c \in \mathbb{R}$. ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

Aufgabe B1.1 (5 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Parabel p_2 in der Scheitelform und bringen Sie die Gleichung in die Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ mit $a \in \mathbb{R}$; $b, c \in \mathbb{R}$. Erstellen Sie sodann für die Parabel p_2 eine Wertetabelle für $x \in [0; 10]$ mit [U+25B5]$x = 1$ und zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-2 \leqq x \leqq 11$; $-3 \leqq y \leqq 8$.
[Ergebnis: $p_2 : y = -0,25x^2 + 3x - 2$]

Lösung zu Aufgabe B1.1

Scheitelpunktform einer Parabel

p_2 besitzt den Scheitel $S_2(6|7)$ und verläuft durch den Punkt $P(9|4,75)$.

Parameter der Scheitelpunktform bestimmen:

Erläuterung: *Scheitelform der Parabel*

Die Scheitelpunktform (kurz: Scheitelform) ist die Funktionsgleichung einer Parabel. Sie hat die Form:

$$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

x_S und y_S sind die Koordinaten des Scheitels S der Parabel: $S\ (x_S|y_S)$.
a ist ein Parameter der einen Wert verschieden von Null hat.

Scheitelpunkt S_2 einsetzen:

$$S_2(6|7) \Rightarrow y = a \cdot (x - 6)^2 + 7$$

Punkt P einsetzen:

$P(9|4,75) \Rightarrow 4,75 = a \cdot (9-6)^2 + 7$

$4,75 = a \cdot (9-6)^2 + 7 \quad | \quad -7$

$-2,25 = 9a \quad | \quad :9$

$\frac{-2,25}{9} = a$

$\Rightarrow a = -0,25$

Scheitelpunktform der Parabel p_2 aufstellen:

$p_2 : y = -0,25 \cdot (x-6)^2 + 7$

Markante Eigenschaften von Funktionen

Scheitelpunktform auflösen (ausmultiplizieren):

$y = -0,25 \cdot (x-6)^2 + 7$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Der Ausdruck $(x-6)^2$ wird mit der zweiten binomischen Formel aufgelöst:

$(a-b)^2 = a^2 - 2a\,b + b^2$

$(x-6)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$

$y = -0,25 \cdot (x^2 - 12x + 36) + 7$

$y = -0,25x^2 + 3x - 9 + 7$

$y = -0,25x^2 + 3x - 2 \qquad$ (allgemeine Form)

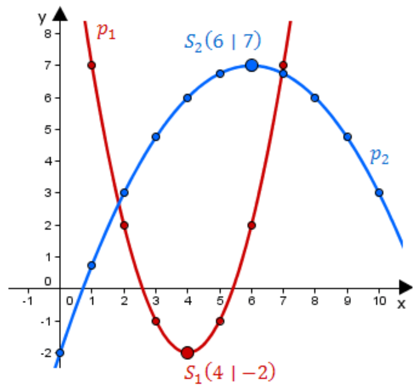
Wertetabelle

Wertetabelle für p_2 (und für p_1) erstellen:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-0,25x^2+3x-2$	−2	0,75	3	4,75	6	6,75	7	6,75	6	4,75	3

x	1	2	3	4	5	6	7
$x^2-8x+14$	7	2	-1	-2	-1	2	7

Skizze



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n\left(x|x^2-8x+14\right)$ auf der Parabel p_1 und Punkte $B_n\left(x|-0,25^2+3x-2\right)$ auf der Parabel p_2 haben dieselbe Abszisse x. Sie sind zusammen mit Punkten C_n die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ mit der Basis $[A_n\,B_n]$, wobei gilt: $y_{A_n} < y_{B_n}$. Die x-Koordinate der Punkte C_n ist um 4 kleiner als die Abszisse x der Punkte A_n.
Zeichnen Sie die Dreiecke $A_1\,B_1\,C_1$ für $x=3$ und $A_2\,B_2\,C_2$ für $x=6,5$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

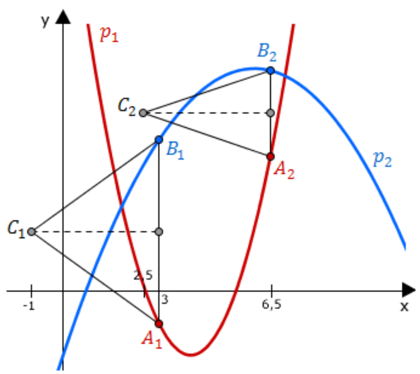
Skizze

$A_n(x|x^2 - 8x + 14) \in p_1$

$B_n(x| - 0,25x^2 + 3x - 2) \in p_2$

Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ für $x = 3$ und $A_2 B_2 C_2$ für $x = 6,5$ einzeichnen:

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Die Punkte A_1 und B_1 haben dieselbe x-Koordinate, $x = 3$. Sie werden auf den Graphen der Parabel p_1 und p_2 eingezeichnet, indem man von der Stelle $x_1 = 3$ auf der Abszissenachse aus senkrecht auf die Graphen der Parabeln zugeht.
>
> Durch das Verbinden der beiden Punkte, erhält man die Basis $[A_1 B_1]$ des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$.
>
> Der Punkt C_1 liegt 4 Längeneinheiten weiter links als die Punkte A_1 und B_1. Seine x-Koordinate ist somit $x = 3 - 4 = -1$.
> Durch Ausmessen der Länge der Seite $[A_1 B_1]$ und Teilen dieser Länge durch 2, findet man dessen Mittelpunkt. Die y-Koordinate des Mittelpunktes entspricht der y-Koordinate von C_1.
>
> Analoges gilt für die Punkte A_2, B_2 und C_2 für $x = 6,5$.



Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung, für welche Belegungen von x es Dreiecke $A_n B_n C_n$ gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Schnitt zweier Parabeln

$p_1 : y = x^2 - 8x + 14$

$p_2 : y = -0,25x^2 + 3x - 2$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Dreiecke $A_n B_n C_n$ kann es nicht geben, wenn die Punkte A_n und B_n gleiche Koordinaten haben. Das ist der Fall, wenn sich die Parabeln p_1 und p_2 schneiden.
>
> Man sucht zunächst nach den Schnittpunkten der Parabeln.

Schnittpunkte bestimmen:

> Erläuterung: *Schnitt zweier Parabeln*
>
> Schema für das Bestimmen der x-Koordinate der Schnittpunkte zweier Parabeln:
>
> 1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
>
> 2. Alle Terme auf eine Seite bringen (links oder rechts), so dass eine Gleichung der Form $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ stehen bleibt.
>
> 3. Lösen der Gleichung mit der Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot b}}{2 \cdot a}$

$-0,25x^2 + 3x - 2 = x^2 - 8x + 14 \mid -x^2 + 8x - 14$

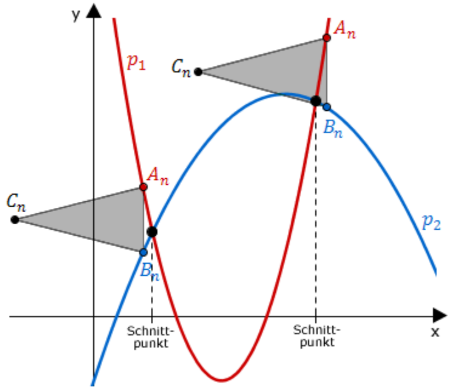
$-1,25x^2 + 11x - 16 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1,25) \cdot 16}}{2 \cdot (-1,25)}$$

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1,25) \cdot 16}}{2 \cdot (-1,25)} = 1,84$$

$x_2 = \dfrac{-11 - \sqrt{11^2 - 4 \cdot (-1,25) \cdot 16}}{2 \cdot (-1,25)} = 6,96$

Erläuterung: *Erläuterung*



Außerhalb der Schnittpunkte gibt es zwar Dreiecke, aber es wären Dreiecke $B_n\,A_n\,C_n$ und nicht $A_n\,B_n\,C_n$ (Punkte eines Dreiecks werden entgegen dem Uhrzeigersinn aufgezählt).

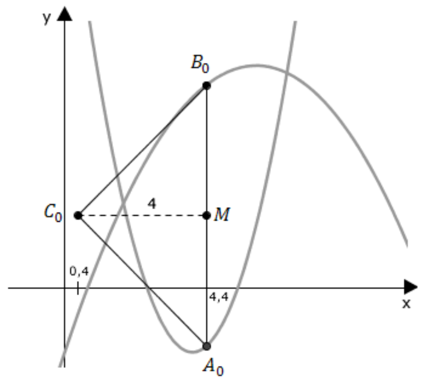
$\Rightarrow$ Gesuchtes Intervall: $1,84 < x < 6,96$

Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Unter den Dreiecken $A_n\,B_n\,C_n$ besitzt das Dreieck $A_0\,B_0\,C_0$ den maximalen Flächeninhalt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A_0\,B_0\,C_0$ und geben Sie die Koordinaten des Punktes C_0 an.
[Teilergebnis: $\overline{A_n\,B_n}(x) = (-1,25x^2 + 11x - 16)$ LE]

Lösung zu Aufgabe B1.4

Flächeninhalt eines Dreiecks



Aus Aufgabe B 1.2 sind die Punkte A_n und B_n bekannt:

$A_n\ \left(x|x^2 - 8x + 14\right)$

$B_n\ \left(x|-0,25x^2 + 3x - 2\right)$

Länge der Grundseite $[A_n\,B_n]$ eines Dreiecks $A_n\,B_n\,C_n$ bestimmen:

Erläuterung: *Abstand zweier Punkte*

Die Länge der Seite $[A_n\,B_n]$ entspricht dem Abstand der Punkte A_n und B_n, da sie die gleiche x-Koordinaten haben.

Somit ist die Differenz der y-Koordinaten gleich dem Abstand.

$\overline{A_n\,B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$

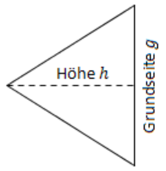
$\overline{A_n\,B_n} = \left[\left(-0,25x^2 + 3x - 2\right) - \left(x^2 - 8x + 14\right)\right]$ LE (Längeneinheiten)

$\overline{A_n\,B_n} = \left(-0,25x^2 + 3x - 2 - x^2 + 8x - 14\right)$ LE

$\Rightarrow \overline{A_n\,B_n} = \left(-1,25x^2 + 11x - 16\right)$ LE

Flächeninhalt eines Dreiecks $A_n\,B_n\,C_n$ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit Grundseite g und Höhe h ist gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n B_n} \cdot 4$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(-1,25x^2 + 11x - 16\right) \cdot 4 \text{ FE (Flächeneinheiten)}$$

$$\Rightarrow A = \left(-2,5x^2 + 22x - 32\right) \text{ FE}$$

Extremwertaufgabe

x-Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $y = -2,5x^2 + 22x - 32$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_n B_n C_n$ ist für verschiedene x unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten x-Wert ist der Flächeninhalt $A = \left(-2,5x^2 + 22x - 32\right)$ FE am größten (maximal).

Die Funktion $y = -2,5x^2 + 22x - 32$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel. Den größte Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + x$ sind gegeben durch:

$$S\left(\frac{-b}{2a}|c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$x_{max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-22}{2 \cdot (-2,5)} = 4,4$$

Maximalen Flächeninhalt bestimmen:

$$A_{max} = -2,5 \cdot 4,4^2 + 22 \cdot 4,4 - 32$$

$$\Rightarrow A_{max} = 16,4 \text{ (FE)}$$

$\Rightarrow$ Das Dreieck $A_0 B_0 C_0$ hat einen Flächeninhalt von $16,4$ FE

Lage eines Punktes

x-Koordinate des Punktes C_0 bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Nach Angabe der Aufgabe B 1.2 ist die x-Koordinate der Punkte C_n um 4 kleiner als die x-Koordinate der Punkte A_n.

$$x_{C_0} = x_{A_0} - 4 = 4,4 - 4 = 0,4 \text{ LE}$$

y-Koordinate der Punkte A_0 und B_0 bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

$x_{max} = 4,4$ wird in den Term für die y-Koordinate der Punkte A_n und B_n eingesetzt.

$y_{A_0} = 4,4^2 - 8 \cdot 4,4 + 14 = -1,84$ LE

$y_{B_0} = -0,25 \cdot 4,4^2 + 3 \cdot 4,4 - 2 = 6,36$ LE

y-Koordinate des Mittelpunktes M der Strecke $[A_0\,B_0]$ bestimmen:

$$y_M = \frac{y_{A_0} + y_{B_0}}{2} = \frac{-1,84 + 6,36}{2} = 2,26$$

$\Rightarrow$ Koordinaten des Punktes C_0: $C_0(0,4|2,26)$

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Für $x = 4$ ergibt sich das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$.
Zeichnen Sie das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein und begründen Sie, dass das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ rechtwinklig ist.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

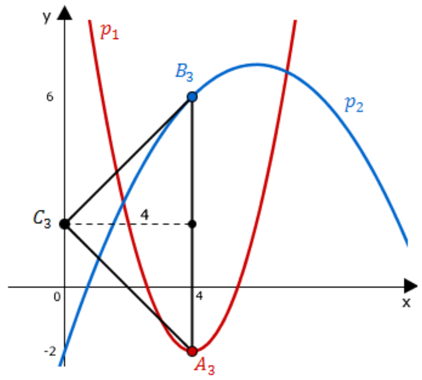
Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ für $x = 4$ einzeichnen:

Erläuterung: *Erläuterung*

$A_n(x|x^2 - 8x + 14) \in p_1 \Rightarrow A_3(4|-2)$

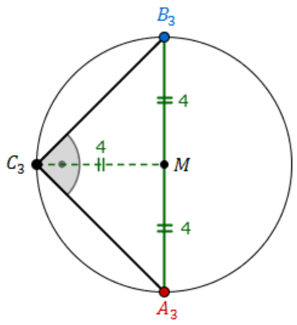
$B_n(x|-0,25x^2 + 3x - 2) \in p_2 \Rightarrow B_3(4|6)$

Der Punkt C_3 liegt 4 Längeneinheiten weiter links als die Punkte A_3 und B_3. Seine x-Koordinate ist somit $x = 4 - 4 = 0$.
Durch Ausmessen der Länge der Seite $[A_3\,B_3]$ und Teilen dieser Länge durch 2, findet man dessen Mittelpunkt. Die y-Koordinate des Mittelpunktes entspricht der y-Koordinate von C_1.



Rechtwinkligkeit

Das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ ist rechtwinklig.



Begründung (Thaleskreis):

Mit dem Teilergebnis von Aufgabe B 1.4 folgt:

$\overline{A_3\,B_3} = -1,25 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 16 = 8$ LE

Nach Aufgabe B 1.2 ist:

$\overline{M\,C_3} = 4$ LE , mit M Mittelpunkt von $[A_3\,B_3]$

Da das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ gleichschenklig ist (siehe Aufgabe B 1.2), teilt die Höhe $[M\,C_3]$ die Grundseite in zwei gleichlange Strecken. Es gilt somit:

$\overline{M\,C_3} = \overline{M\,A_3} = \overline{M\,B_3} = 4$ LE

Es folgt daraus, dass der Punkt C_3 auf eine Kreislinie um dem Mittelpunkt M mit dem Durchmesser $\overline{A_3\,B_3}$ liegt. Das Dreieck $A_3\,B_3\,C_3$ ist somit rechtwinklig.