

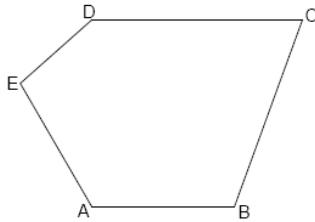
## Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik II Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Gegeben ist ein Fünfeck  $ABCDE$  mit  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ ;  $\overline{EA} = 5 \text{ cm}$ ;  $\angle CBA = 110^\circ$ ;  $\angle BAE = 120^\circ$ .

Es gilt:  $AB \parallel DC$ ;  $AD \perp AB$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



### Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Fünfeck  $ABCDE$ .

### Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand  $d$  des Punktes  $B$  von der Geraden  $DC$ .

[Ergebnis:  $d = 6,58 \text{ cm}$ ]

### Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$ .

[Ergebnis:  $A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$ ]

### Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke  $[DE]$  sowie das Maß  $\varepsilon$  des Winkels  $EDA$ .

[Ergebnisse:  $\overline{DE} = 3,36 \text{ cm}$ ;  $\varepsilon = 48,08^\circ$ ]

### Aufgabe B2.5 (4 Punkte)

Der Punkt  $E$  ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius  $r = \overline{EA}$ . Dieser Kreis schneidet die Seite  $[CD]$  des Fünfecks  $ABCDE$  im Punkt  $G$ .

Zeichnen Sie den Kreisbogen  $\widehat{AG}$  und die Strecke  $[EG]$  in die Zeichnung zu 2.1 ein.

Berechnen Sie das Maß des Winkels  $AEG$ .

[Ergebnis:  $\angle = 86,68^\circ$ ]

### Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Die Figur  $GDEA$  wird durch die Strecken  $[GD]$ ,  $[DE]$  und  $[EA]$  sowie den Kreisbogen  $\widehat{AG}$  begrenzt.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts  $A$  der Figur  $GDEA$  am Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$ .

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts  $A$  der Figur  $GDEA$  am Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$ .

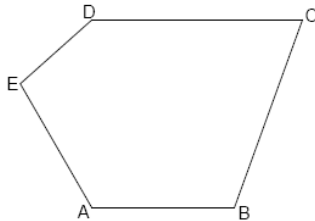
## Lösung

## Aufgabe B2.

Gegeben ist ein Fünfeck  $ABCDE$  mit  $\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ ;  $\overline{EA} = 5 \text{ cm}$ ;  $\angle CBA = 110^\circ$ ;  $\angle BAE = 120^\circ$ .

Es gilt:  $AB \parallel DC$ ;  $AD \perp AB$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



## Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

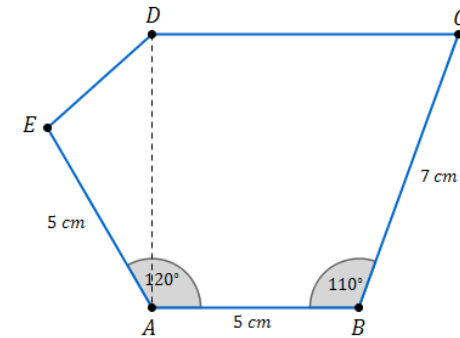
Zeichnen Sie das Fünfeck  $ABCDE$ .

## Lösung zu Aufgabe B2.1

## Skizze

$\overline{AB} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ ;  $\overline{EA} = 5 \text{ cm}$ ;  $\angle CBA = 110^\circ$ ;  $\angle BAE = 120^\circ$

$AB \parallel DC$ ;  $AD \perp AB$



## Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

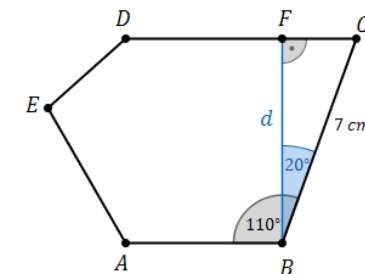
Bestimmen Sie durch Rechnung den Abstand  $d$  des Punktes  $B$  von der Geraden  $DC$ .

[Ergebnis:  $d = 6,58 \text{ cm}$ ]

## Lösung zu Aufgabe B2.2

## Abstand Punkt - Gerade

$\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ ;  $\angle CBA = 110^\circ$



Sei  $F$  der Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $B$  auf die Gerade  $DC$ . Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck  $CFB$ .

Winkel  $\angle CBF$  bestimmen:

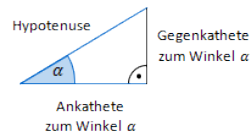
Erläuterung: *Erläuterung*

$[BF]$  steht senkrecht auf  $[AB]$ . Der Winkel  $\angle FBA$  beträgt somit  $90^\circ$ . Zieht man diesen von den  $110^\circ$  des Winkels  $\angle CBA$  ab, so erhält man den Winkel  $\angle CBF$ .

$$\angle CBF = 110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$$

Seitenlänge  $\overline{FB}$  bestimmen:

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos \angle CBF = \frac{\overline{FB}}{\overline{BC}}$$

$$\cos 20^\circ = \frac{\overline{FB}}{7} \cdot 7$$

$$\overline{FB} = 7 \cdot \cos 20^\circ \approx 6,58 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$  Der Abstand des Punktes  $B$  von der Geraden  $DC$  ist  $d = 6,58$  cm.

**Aufgabe B2.3** (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$ .

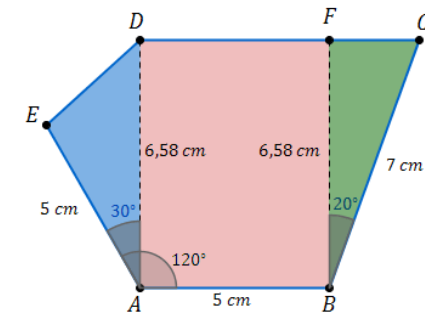
[Ergebnis:  $A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$ ]

**Lösung zu Aufgabe B2.3**

**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{AB} = \overline{EA} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{AD} = \overline{FB} = 6,58 \text{ cm}$ ;  $\overline{BC} = 7 \text{ cm}$ ;  $\angle BAE = 120^\circ$ ;  $\angle CBF = 20^\circ$



Maß des Winkels  $\angle DAE$  bestimmen:

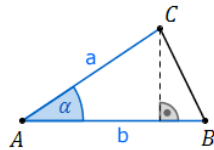
Erläuterung: *Erläuterung*

$[AD]$  steht senkrecht auf  $[AB]$ . Der Winkel  $\angle DAB$  beträgt somit  $90^\circ$ . Zieht man diesen von  $120^\circ$  des Winkels  $\angle EAB$  ab, so erhält man den Winkel  $\angle DAE$ .

$$\angle DAE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

Flächeninhalt des Dreiecks  $ADE$  bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{EA} \cdot \sin \angle DAE$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \left( \frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ \right) \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des Dreiecks  $BCF$  bestimmen:

$$A_{\text{Dreieck } BCF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle CBF$$

$$A_{\text{Dreieck } ADE} = \left( \frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 7 \cdot \sin 20^\circ \right) \text{ cm}^2$$

**Flächeninhalt eines Rechtecks**

Flächeninhalt des Rechtecks  $ABCD$  bestimmen:

$$A_{\text{Rechteck } ABCD} = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

$$A_{\text{Rechteck } ABCD} = (6,58 \cdot 7) \text{ cm}^2$$

**Flächeninhalt einer geometrischen Figur**

Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$  bestimmen:

$$A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = A_{\text{Dreieck } ADE} + A_{\text{Rechteck } ABCD} + A_{\text{Dreieck } BCF}$$

$$A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = \left( \frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ + 6,58 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 6,58 \cdot 7 \cdot \sin 20^\circ \right) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$$

**Aufgabe B2.4** (2 Punkte)

Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke  $[DE]$  sowie das Maß  $\varepsilon$  des Winkels  $EDA$ .

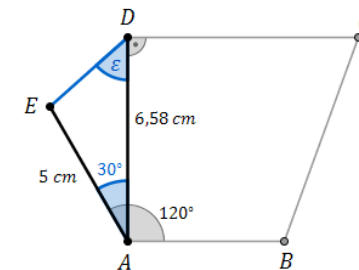
[Ergebnisse:  $\overline{DE} = 3,36 \text{ cm}$ ;  $\varepsilon = 48,08^\circ$ ]

**Lösung zu Aufgabe B2.4**

**Seite eines Dreiecks bestimmen**

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

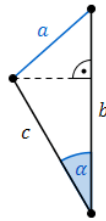
$\overline{EA} = 5 \text{ cm}$ ;  $\overline{AD} = 6,58 \text{ cm}$ ;  $\angle DAE = 30^\circ$



Betrachtet wird das Dreieck  $ADE$ .

Länge der Strecke  $[DE]$  mit dem Kosinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten  $b$  und  $c$  und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel  $\alpha$  gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{DE}^2 = 6,58^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6,58 \cdot \cos 30^\circ \quad | \text{ Wurzel ziehen}$$

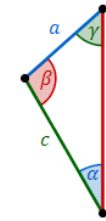
$$\overline{DE} = \sqrt{6,58^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6,58 \cdot \cos 30^\circ} \text{ cm}$$

$$\overline{DE} \approx 3,36 \text{ cm}$$

**Innenwinkel eines Dreiecks**

Maß  $\varepsilon$  des Winkels  $\angle EDA$  mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\text{Im Dreieck } ADE \text{ gilt somit: } \frac{\overline{EA}}{\sin \varepsilon} = \frac{\overline{DE}}{\sin \angle DAE} \iff \frac{\sin \varepsilon}{\overline{EA}} = \frac{\sin \angle DAE}{\overline{DE}}$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{\overline{EA}} = \frac{\sin \angle DAE}{\overline{DE}}$$

$$\frac{\sin \varepsilon}{5} = \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5$$

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\varepsilon$  aus  $\sin \varepsilon = \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5 \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \sin$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sin^{-1} \left( \frac{\sin 30^\circ}{3,36} \cdot 5 \right) \approx 48,08^\circ$$

**Aufgabe B2.5** (4 Punkte)

Der Punkt  $E$  ist der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius  $r = \overline{EA}$ . Dieser Kreis schneidet die Seite  $[CD]$  des Fünfecks  $ABCDE$  im Punkt  $G$ .

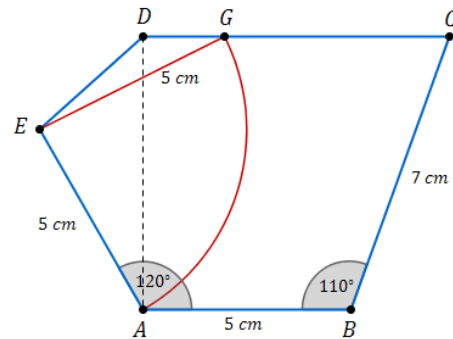
Zeichnen Sie den Kreisbogen  $\widehat{AG}$  und die Strecke  $[EG]$  in die Zeichnung zu 2.1 ein.

Berechnen Sie das Maß des Winkels  $\angle AEG$ .

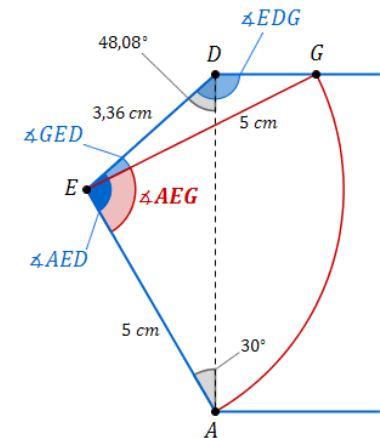
[Ergebnis:  $\angle = 86,68^\circ$ ]

Lösung zu Aufgabe B2.5

Skizze



*Innenwinkel eines Dreiecks*



Gesucht ist das Maß des Winkels  $\angle AEG$ .

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\angle DAE = 30^\circ$  ;  $\angle EDA = \varepsilon = 48,08^\circ$  ;  $\overline{EG} = 5 \text{ cm}$  ;  $\overline{DE} = 3,36 \text{ cm}$

Um das Maß des Winkels  $\angle AEG$  bestimmen zu können, müssen zuvor folgende Maße der Winkeln bestimmt werden:

- 1) Maß des Winkels  $\angle AED$
- 2) Maß des Winkels  $\angle EDG$
- 3) Maß des Winkels  $\angle DGE$
- 4) Maß des Winkels  $\angle GDE$

1) Maß des Winkels  $\angle AED$  bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Im Dreieck  $ADE$  gilt somit:  $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180^\circ$

$$\angle AED = 180^\circ - (\angle EDA + \angle DAE)$$

$$\angle AED = 180^\circ - (48,08^\circ + 30^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle AED = 101,92^\circ$$

2) Maß des Winkels  $\angle EDG$  bestimmen:

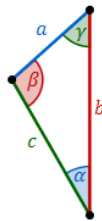
$$\angle EDG = \angle EDA + 90^\circ$$

$$\angle EDG = 48,08^\circ + 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EDG = 138,08^\circ$$

3) Maß des Winkels  $\angle DGE$  mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $EGD$  gilt somit:  $\frac{\overline{DE}}{\sin \angle DGE} = \frac{\overline{GE}}{\sin \angle EDG} \iff \frac{\sin \angle DGE}{\overline{DE}} = \frac{\sin \angle EDG}{\overline{GE}}$

$$\frac{\sin \angle DGE}{\overline{DE}} = \frac{\sin \angle EDG}{\overline{GE}}$$

$$\frac{\sin \angle DGE}{3,36} = \frac{\sin 138,08^\circ}{5} \cdot 3,36$$

$$\sin \angle DGE = \frac{\sin 138,08^\circ}{5} \cdot 3,36$$

$$\Rightarrow \angle DGE = \sin^{-1} \left( \frac{\sin 138,08^\circ}{5} \cdot 3,36 \right) \approx 26,68^\circ$$

4) Maß des Winkels  $\angle GED$  bestimmen:

$$\angle GED = 180^\circ - (\angle EDG + \angle DGE)$$

$$\angle GED = 180^\circ - (138,08^\circ + 26,68^\circ)$$

$$\Rightarrow \angle GED = 15,24^\circ$$

Maß des Winkels  $\angle AEG$  bestimmen:

$$\angle AEG = \angle AED - \angle GED$$

$$\angle AEG = 101,92^\circ - 15,24^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AEG = 86,68^\circ$$

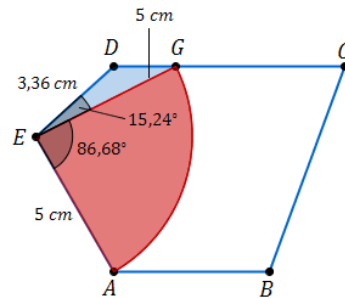
**Aufgabe B2.6** (3 Punkte)

Die Figur  $GDEA$  wird durch die Strecken  $[GD]$ ,  $[DE]$  und  $[EA]$  sowie den Kreisbogen  $\widehat{AG}$  begrenzt.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Flächeninhalts  $A$  der Figur  $GDEA$  am Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$ .

**Lösung zu Aufgabe B2.6**

**Flächeninhalt eines Dreiecks**

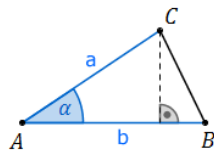


Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\overline{EA} = \overline{EG} = 5 \text{ cm}, \overline{DE} = 3,36 \text{ cm}; \angle AEG = 86,68^\circ, \angle GED = 15,24^\circ; A_{\text{Fünfeck } ABCDE} = 49,00 \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt des Dreiecks  $EGD$  bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

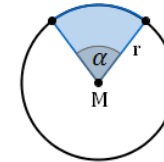
$$A_{\text{Dreieck } EGD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{EG} \cdot \sin \angle GED$$

$$A_{\text{Dreieck } EGD} = \left( \frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 5 \cdot \sin 15,24^\circ \right) \text{ cm}^2$$

**Flächeninhalt eines Kreissektors**

Flächeninhalt des Kreissektors  $EAG$  bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt  $A$  eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$  ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$  gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Kreissektor } EAG} = \overline{EA}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle DEA}{360^\circ}$$

$$A_{\text{Kreissektor } EAG} = \left( 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86,68^\circ}{360^\circ} \right) \text{ cm}^2$$

**Flächeninhalt einer geometrischen Figur**

Flächeninhalt der Figur  $GDEA$  bestimmen:

$$A_{GDEA} = A_{\text{Dreieck } EGD} + A_{\text{Kreissektor } EAG}$$

$$A_{GDEA} = \left( \frac{1}{2} \cdot 3,36 \cdot 5 \cdot \sin 15,24^\circ + 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{86,68^\circ}{360^\circ} \right) \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow A_{GDEA} \approx 21,12 \text{ cm}^2$$

**Verhältnis von Teilflächen**

Prozentualen Anteil des Flächeninhalts der Figur  $GDEA$  am Flächeninhalt des Fünfecks  $ABCDE$  bestimmen:



$$\frac{A_{GDEA}}{A_{\text{Fünfeck } ABCDE}} = \frac{21,12 \text{ cm}^2}{49,00 \text{ cm}^2} \cdot 100\% \approx 43\%$$