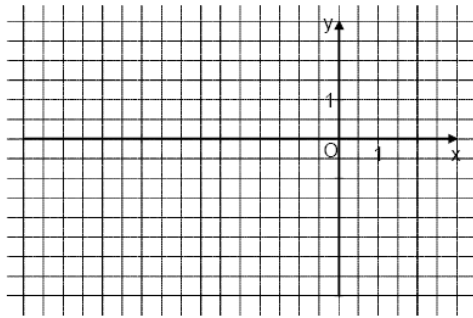


## Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe A2

### Aufgabe A2.0

Die Pfeile  $\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{OR_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$  mit  $O(0|0)$  spannen für  $\varphi \in ]37^\circ; 180^\circ[$  Parallelelogramme  $OP_n Q_n R_n$  auf.



### Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile  $\overrightarrow{OP_1}$  und  $\overrightarrow{OR_1}$  für  $\varphi = 65^\circ$  sowie  $\overrightarrow{OP_2}$  und  $\overrightarrow{OR_2}$  für  $\varphi = 150^\circ$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. Zeichnen Sie sodann die Parallelelogramme  $OP_1 Q_1 R_1$  und  $OP_2 Q_2 R_2$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

### Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken  $[OP_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  

$$\overrightarrow{OP_n}(\varphi) = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25} \text{ LE.}$$

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Punkte  $R_n$  auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt  $O$  mit dem Radius  $r = 3$  LE liegen.

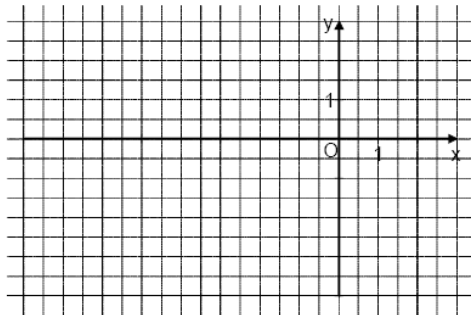
### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Parallelelogramm  $OP_3 Q_3 R_3$  ist eine Raute. Diese wird durch die Pfeile  $\overrightarrow{OP_3}$  und  $\overrightarrow{OR_3}$  aufgespannt. Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Lösung

## Aufgabe A2.0

Die Pfeile  $\overrightarrow{OP_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{OR_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$  mit  $O(0|0)$  spannen für  $\varphi \in ]37^\circ; 180^\circ[$  Parallelelogramme  $OP_nQ_nR_n$  auf.



## Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile  $\overrightarrow{OP_1}$  und  $\overrightarrow{OR_1}$  für  $\varphi = 65^\circ$  sowie  $\overrightarrow{OP_2}$  und  $\overrightarrow{OR_2}$  für  $\varphi = 150^\circ$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. Zeichnen Sie sodann die Parallelelogramme  $OP_1Q_1R_1$  und  $OP_2Q_2R_2$  in das Koordinatensystem zu 2.0 ein.

## Lösung zu Aufgabe A2.1

## Koordinaten von Vektoren bestimmen

$$\overrightarrow{OP_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OR_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Pfeile  $\overrightarrow{OP_1}$  und  $\overrightarrow{OR_1}$  für  $\varphi = 65^\circ$  bestimmen:

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 65^\circ - 2 \\ 0,5 \cdot \sin 65^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,15 \\ 0,45 \end{pmatrix}$$

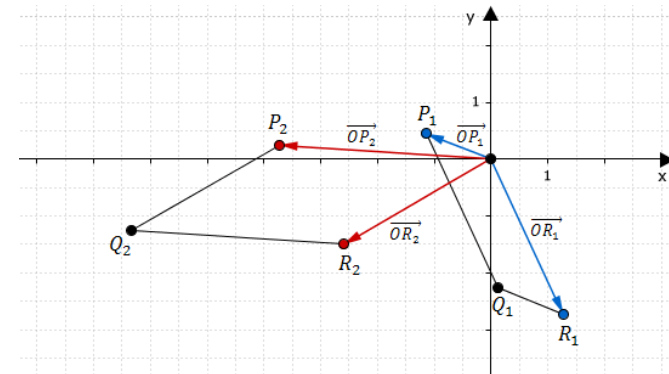
$$\overrightarrow{OR_1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 65^\circ \\ -3 \cdot \sin 65^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,27 \\ -2,72 \end{pmatrix}$$

Pfeile  $\overrightarrow{OP_2}$  und  $\overrightarrow{OR_2}$  für  $\varphi = 150^\circ$  bestimmen:

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos 150^\circ - 2 \\ 0,5 \cdot \sin 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,73 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OR_2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 150^\circ \\ -3 \cdot \sin 150^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,60 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

## Skizze



## Aufgabe A2.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecken  $[OP_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  
 $\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25}$  LE.

## Lösung zu Aufgabe A2.2

## Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{OP_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Länge  $\overline{OP_n(\varphi)}$  des Vektors  $\overrightarrow{OP_n}$  bestimmen:

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \left| \overrightarrow{OP_n(\varphi)} \right|$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \left| \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge  $\bar{a}$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:  $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{(2 \cdot \cos \varphi - 2)^2 + (0,5 \cdot \sin \varphi)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Zweite binomische Formel:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Die zweite binomische Formel wird auf  $(2 \cdot \cos \varphi - 2)^2$  angewendet:

$$\begin{aligned} \overbrace{(2 \cdot \cos \varphi - 2)^2}^a \quad \overbrace{2}^b &= (2 \cdot \cos \varphi)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \cos \varphi \cdot 2 + 2^2 \\ (2 \cdot \cos \varphi - 2)^2 &= 4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 \end{aligned}$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 + 0,25 \cdot \sin^2 \varphi}$$

Erläuterung: *Trigonometrischer Pythagoras*

$\sin^2 \varphi$  wird durch  $1 - \cos^2 \varphi$  ersetzt, da nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 + 0,25 \cdot (1 - \cos^2 \varphi)}$$

$$\overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{4 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4 + 0,25 - 0,25 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \overline{OP_n(\varphi)} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25} \text{ LE}$$

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Punkte  $R_n$  auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt  $O$  mit dem Radius  $r = 3$  LE liegen.

### Lösung zu Aufgabe A2.3

#### Länge eines Vektors

$$\overrightarrow{OR_n(\varphi)} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Länge  $\overline{OR_n(\varphi)}$  des Vektors  $\overrightarrow{OR_n(\varphi)}$  bestimmen:

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \left| \overrightarrow{OR_n(\varphi)} \right|$$

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \left| \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \right|$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge  $\bar{a}$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:  $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \sqrt{(3 \cdot \cos \varphi)^2 + (-3 \cdot \sin \varphi)^2}$$

$$\overline{OR_n(\varphi)} = \sqrt{9 \cdot \cos^2 \varphi + 9 \cdot \sin^2 \varphi} \quad | \text{ 9 ausklammern}$$

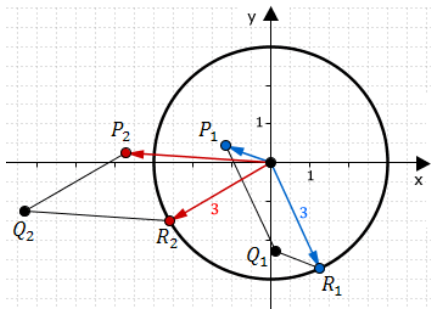
$$\overline{OR_n(\varphi)} = \sqrt{9 \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_1} \quad | \text{ trigonometrischen Pythagoras anwenden}$$

Erläuterung: *Trigonometrischer Pythagoras*

Nach dem trigonometrischen Pythagoras gilt:  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$

$$\overline{OP_n}(\varphi) = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \overline{OP_n}(\varphi) = 3 \text{ LE}$$



Für alle Winkel  $\varphi \in ]37^\circ; 180^\circ[$  gilt:  $\overline{OP_n}(\varphi) = 3$ . Somit liegen die Punkte  $R_n$  auf einer Kreislinie um den Mittelpunkt  $O$  mit Radius  $r = 3$  LE.

#### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Parallelogramm  $OP_3Q_3R_3$  ist eine Raute. Diese wird durch die Pfeile  $\overrightarrow{OP_3}$  und  $\overrightarrow{OR_3}$  aufgespannt.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Lösung zu Aufgabe A2.4

##### Wurzelgleichungen

Laut Teilaufgabe A 2.2 gilt:  $\overline{OP_n} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - \cos \varphi + 4,25}$

$$\Rightarrow \overline{OP_3} = \sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25}$$

Laut Teilaufgabe A 2.3 gilt:  $\overline{OR_n} = 3$  LE

$$\Rightarrow \overline{OR_3} = 3$$

Das Parallelogramm  $OP_3Q_3R_3$  ist eine Raute, also gilt:  $\overline{OP_3} = \overline{OR_3}$

$$\sqrt{3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25} = 3 \quad | \quad \text{Quadrieren}$$

$$3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi + 4,25 = 9 \quad | \quad -9$$

$$3,75 \cdot \cos^2 \varphi - 8 \cdot \cos \varphi - 4,75 = 0 \quad | \quad \text{Ersetzung: } \cos \varphi = x$$

$$3,75x^2 - 8x - 4,75 = 0 \quad | \quad \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3,75 \cdot 4,75}}{2 \cdot 3,75}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{135,25}}{7,5}$$

Rückersetzung:

$$\cos \varphi = x_1$$

$$\cos \varphi = \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $\varphi$  aus  $\cos \varphi = \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5}$  zu bestimmen, wird folgendes im Taschenrechner (TR) eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \cos$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1} \left( \frac{8 - \sqrt{135,25}}{7,5} \right) = 118,94^\circ$$

Bemerkung:  $x_2 = \frac{8 + \sqrt{135,25}}{7,5}$  wird verworfen, da  $\frac{8 + \sqrt{135,25}}{7,5} = 2,62$  und der Kosinus eines Winkels höchstens den Wert 1 haben kann.