Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_2(x+8)+1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an.

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 6$; $-4 \leqq y \leqq 9$.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n\ (x|\log_2(x+8)+1)$ auf dem Graphen zu f sind zusammen mit dem Punkt $B(0|0)$ und Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Quadraten $A_n B C_n D_n$.
Zeichnen Sie die Quadrate $A_1 B C_1 D_1$ für $x = -5$ und $A_2 B C_2 D_2$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Die Punkte A_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph t der Punkte C_n die Gleichung $y = -2^{x-1}+8$ besitzt.
Zeichnen Sie den Trägergraphen t der Punkte C_n in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.
[Teilergebnis: $C_n\ (\log_2(x+8)+1|-x)$]

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Für das Quadrat $A_3 B C_3 D_3$ gilt: $A_3(-4|3)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3.

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Für das Quadrat $A_4 B C_4 D_4$ gilt: Der Punkt D_4 liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.
Ermitteln Sie rechnerisch die x-Koordinate des Punktes A_4.

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_2(x+8)+1$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsmenge einer Funktion

$f: y = \log_2(x+8)+1$

> Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*
>
> Die Logarithmusfunktion $\log_2(x+8)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x-Werte gilt: $x+8>0$.

$x+8>0$

$x>-8$

$\Rightarrow \quad D_f =]-8;\infty[$

Wertemenge einer Funktion

f ist eine Logarithmusfunktion.

$\Rightarrow \quad W_f = \mathbb{R}$

Asymptoten einer Funktion

$D_f =]-8;\infty[$

$\Rightarrow \quad h: x = -8 \quad$ (senkrechte Asymptote)

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leqq x \leqq 6$; $-4 \leqq y \leqq 9$.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Wertetabelle

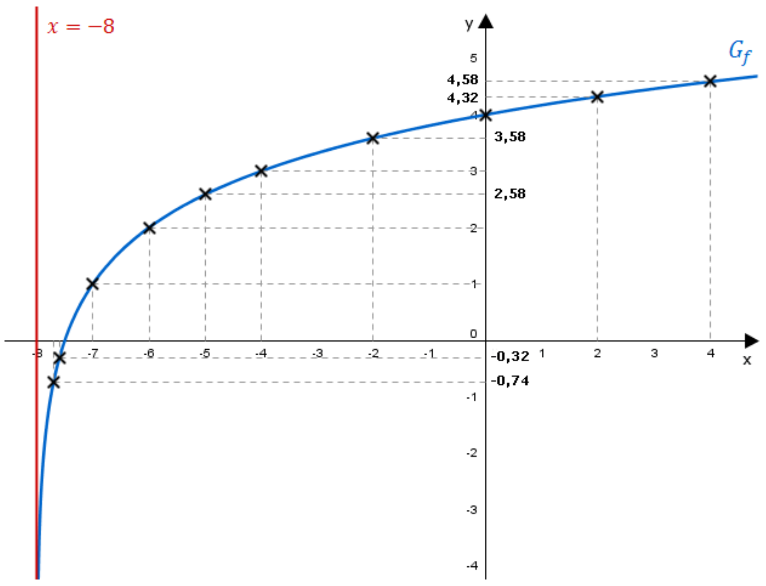
$f: y = \log_2(x+8) + 1$

Wertetabelle für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ erstellen:

x	$-7,7$	$-7,6$	-7	-6	-5	-4	-2	0	2	4
$y = \log_2(x+8)+1$	$-0,74$	$-0,32$	1	2	$2,58$	3	$3,58$	4	$4,32$	$4,58$

Skizze

Graph G_f der Funktion f:



Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n\,(x|\log_2(x+8)+1)$ auf dem Graphen zu f sind zusammen mit dem Punkt $B(0|0)$ und Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Quadraten $A_n\,B\,C_n\,D_n$.
Zeichnen Sie die Quadrate $A_1\,B\,C_1\,D_1$ für $x=-5$ und $A_2\,B\,C_2\,D_2$ für $x=1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Skizze

$A_n(x|\log_2(x+8)+1)$

Für $x=-5$ ist $A_1(-5|\log_2(3)+1) = A_1(-5|2,58)$

Für $x=1$ ist $A_2(1|\log_2(9)+1) = A_2(1|4,17)$

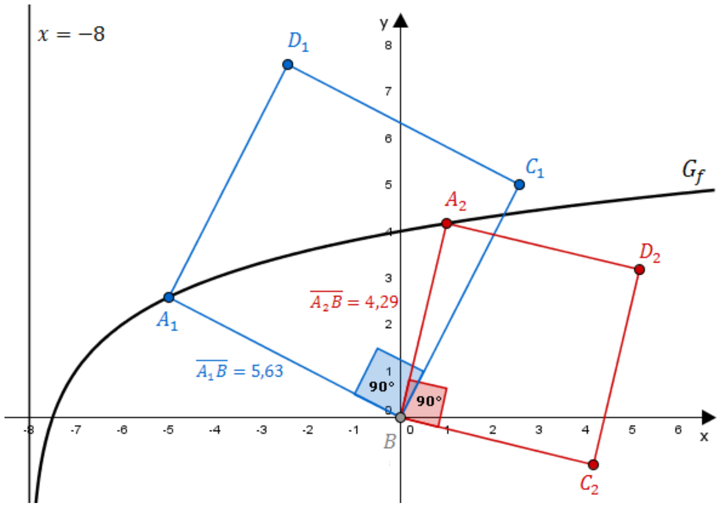
$B(0|0)$

Quadrate $A_1\,B\,C_1\,D_1$ und $A_2\,B\,C_2\,D_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um das Quadrat $A_1\,B\,C_1\,D_1$ (und $A_2\,B\,C_2\,D_2$) einzuzeichnen, muss der Punkt A_1 mit dem Punkt B verbunden werden.
Mit dem Lineal wird die Strecke $\overline{A_1\,B}$ gemessen (ca. 5,63 cm). Der Punkt C_1 liegt dann 5,63 cm von B entfernt. Die Seite $[B\,C_1]$ liegt senkrecht zu $[A_B]$.

Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn eingezeichnet.



Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Die Punkte A_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph t der Punkte C_n die Gleichung $y = -2^{x-1} + 8$ besitzt.
Zeichnen Sie den Trägergraphen t der Punkte C_n in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.
[Teilergebnis: C_n $(\log_2(x+8)+1|-x)$]

Lösung zu Aufgabe B1.4

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$A_n(x|\log_2(x+8))$

Die Punkte C_n entstehen durch Drehung der Punkte A_n um $\varphi = -90°$ (Drehwinkel ist negativ, da die Drehrichtung im Uhrzeigersinn ist) um den Punkt $B(0|0)$.

Drehmatrix aufstellen:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der Punkte C_n bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \log_2(x+8)+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2(x+8)+1 \\ -x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C_n(\log_2(8+x)+1|-x)$

Funktion t des Trägergraphen bestimmen:

Erläuterung: *Trägergraphen*

Der Trägergraph besteht aus allen möglichen Punkten C_n, die durch die Drehung entstehen können.
Man stellt sich dies als Bewegung vor bei der der Punkt C_n betrachtet wird.

$x'' = \log_2(x+8)+1$ nach x auflösen:

$x'' = \log_2(x+8)+1 \quad | \quad -1$

$x''-1 = \log_2(x+8) \quad | \quad$ entlogarithmieren

$2^{x''-1} = 2^{\log_2(x+8)}$

$2^{x''-1} = x + 8 \quad | \quad -8$

$x = 2^{x''-1} - 8$

$x = 2^{x''-1} - 8$ einsetzen in y'':

$y'' = -x = -(2^{x''-1} - 8) = -2^{x''-1} + 8$

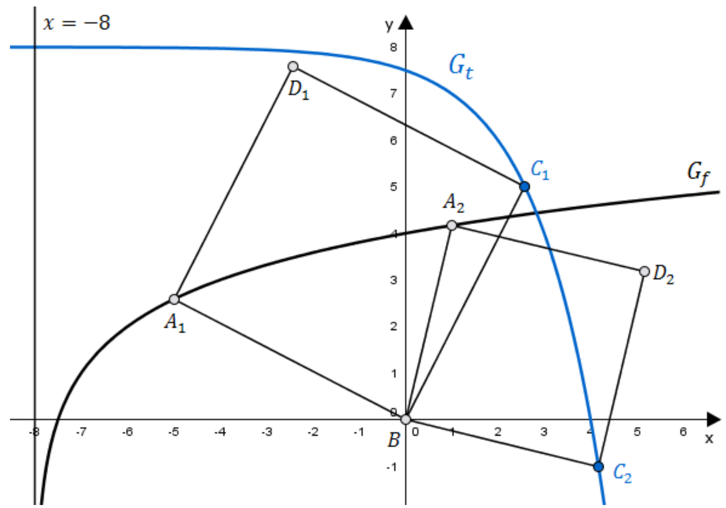
$\Rightarrow \quad t : y = -2^{x-1} + 8$

Skizze

Wertetabelle anfertigen:

x	-2	0	3
$y = -2^{x-1} + 8$	7,88	7,5	4

Trägergraph t in das Koordinatensystem zu 1.2 einzeichnen:



Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Für das Quadrat $A_3\,B\,C_3\,D_3$ gilt: $A_3(-4|3)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Lage eines Punktes

$C_n(\log_2(x+8)+1| -x)$ (Teilergebnis von Aufgabe B 1.4)

$A_3(-4|3)$

Der Punkt A_3 hat die x-Koordinate -4.

Koordinaten des Punktes C_3 bestimmen:

$C_3(\log_2(-4+8)+1| -(-4)) = (\log_2(4)+1|4) = (3|4)$

Koordinaten des Punktes D_3 bestimmen:

$\overrightarrow{D_3} = \overrightarrow{A_3} + \overrightarrow{C_3}$

$\overrightarrow{D_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad D_3(-1|7)$

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Für das Quadrat $A_4\,B\,C_4\,D_4$ gilt: Der Punkt D_4 liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.
Ermitteln Sie rechnerisch die x-Koordinate des Punktes A_4.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Lage eines Punktes

D_4 liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Da der Punkt B im Ursprung und der Punkt D_4 auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten liegt, folgt:

Der Punkt A_4 liegt auf der x-Achse. Seine y-Koordinate ist somit gleich Null.

$\Rightarrow \quad A_4(x|0)$

Für alle Punkte A_n gilt: $\quad A_n(x|\log_2(x+8)+1)$

Für den Punkt A_4 gilt also:

$\log_2(x+8)+1 = 0 \quad | \quad -1$

$\log_2(x+8) = -1 \quad | \quad$ entlogarithmieren

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus $\log_2$ kann durch die Exponentialfunktion 2^x aufgehoben werden.

Beispiel: $\log_2 x = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{\log_2 x} = 2^3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8$

$2^{\log_2(x+8)} = 2^{-1}$

$x+8 = 2^{-1} \quad | \quad -8$

$x = 2^{-1} - 8$

$\Rightarrow \quad x = -7,5$