

Mittlere-Reife-Prüfung 2009 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_2(x + 8) + 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an.

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in \{-7, 7; -7, 6; -7, -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leq x \leq 6$; $-4 \leq y \leq 9$.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|\log_2(x+8)+1)$ auf dem Graphen zu f sind zusammen mit dem Punkt $B(0|0)$ und Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Quadraten $A_n B C_n D_n$.

Zeichnen Sie die Quadrate $A_1 B C_1 D_1$ für $x = -5$ und $A_2 B C_2 D_2$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Die Punkte A_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph t der Punkte C_n die Gleichung $y = -2^{x-1} + 8$ besitzt.

Zeichnen Sie den Trägergraphen t der Punkte C_n in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

[Teilergebnis: $C_n(\log_2(x+8)+1 | -x)$]

Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Für das Quadrat $A_3 B C_3 D_3$ gilt: $A_3(-4|3)$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3 .

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Für das Quadrat $A_4 B C_4 D_4$ gilt: Der Punkt D_4 liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Ermitteln Sie rechnerisch die x -Koordinate des Punktes A_4 .

Lösung

Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = \log_2(x + 8) + 1$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion f sowie die Gleichung der Asymptote h an.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Definitionsmenge einer Funktion

$$f : y = \log_2(x + 8) + 1$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion $\log_2(x + 8)$ ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche x -Werte gilt: $x + 8 > 0$.

$$x + 8 > 0$$

$$x > -8$$

$$\Rightarrow D_f =] - 8; \infty[$$

Wertemenge einer Funktion

f ist eine Logarithmusfunktion.

$$\Rightarrow W_f = \mathbb{R}$$

Asymptoten einer Funktion

$$D_f =] - 8; \infty[$$

$$\Rightarrow h : x = -8 \quad (\text{senkrechte Asymptote})$$

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Zeichnen Sie sodann den Graphen zu f in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-9 \leq x \leq 6$; $-4 \leq y \leq 9$.

Lösung zu Aufgabe B1.2**Wertetabelle**

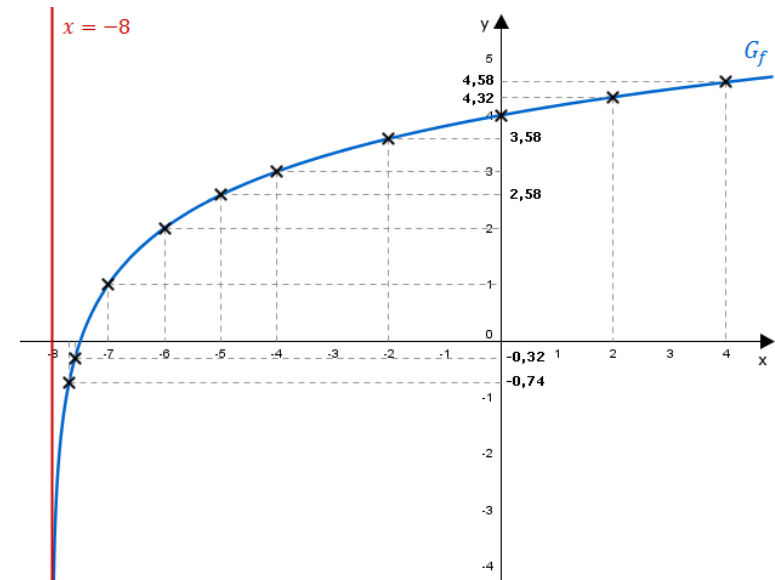
$$f : y = \log_2(x + 8) + 1$$

Wertetabelle für $x \in \{-7,7; -7,6; -7; -6; -5; -4; -2; 0; 2; 4\}$ erstellen:

x	-7,7	-7,6	-7	-6	-5	-4	-2	0	2	4
$y = \log_2(x + 8) + 1$	-0,74	-0,32	1	2	2,58	3	3,58	4	4,32	4,58

Skizze

Graph G_f der Funktion f :

**Aufgabe B1.3** (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|\log_2(x+8)+1)$ auf dem Graphen zu f sind zusammen mit dem Punkt $B(0|0)$ und Punkten C_n und D_n die Eckpunkte von Quadraten $A_n B C_n D_n$.

Zeichnen Sie die Quadrate $A_1 B C_1 D_1$ für $x = -5$ und $A_2 B C_2 D_2$ für $x = 1$ in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.3**Skizze**

$$A_n(x|\log_2(x+8)+1)$$

$$\text{Für } x = -5 \text{ ist } A_1(-5|\log_2(3)+1) = A_1(-5|2,58)$$

$$\text{Für } x = 1 \text{ ist } A_2(1|\log_2(9)+1) = A_2(1|4,17)$$

$$B(0|0)$$

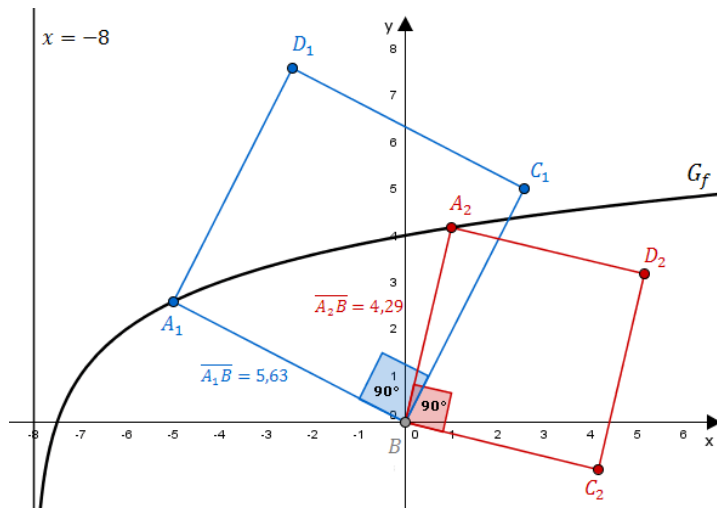
Quadrate $A_1 B C_1 D_1$ und $A_2 B C_2 D_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Um das Quadrat $A_1 B C_1 D_1$ (und $A_2 B C_2 D_2$) einzuzichnen, muss der Punkt A_1 mit dem Punkt B verbunden werden.

Mit dem Lineal wird die Strecke $\overline{A_1 B}$ gemessen (ca. 5,63 cm). Der Punkt C_1 liegt dann 5,63 cm von B entfernt. Die Seite $[B C_1]$ liegt senkrecht zu $[A_1 B]$.

Punkte werden entgegen dem Uhrzeigersinn eingezeichnet.



Aufgabe B1.4 (5 Punkte)

Die Punkte A_n können auf die Punkte C_n abgebildet werden.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Trägergraph t der Punkte C_n die Gleichung $y = -2^{x-1} + 8$ besitzt.

Zeichnen Sie den Trägergraphen t der Punkte C_n in das Koordinatensystem zu 1.2 ein.
[Teilergebnis: $C_n (\log_2(x+8) + 1 | -x)$]

Lösung zu Aufgabe B1.4

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$A_n(x | \log_2(x+8))$$

Die Punkte C_n entstehen durch Drehung der Punkte A_n um $\varphi = -90^\circ$ (Drehwinkel ist negativ, da die Drehrichtung im Uhrzeigersinn ist) um den Punkt $B(0|0)$.

Drehmatrix aufstellen:

$$D = \begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Koordinaten der Punkte C_n bestimmen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \log_2(x+8) + 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log_2(x+8) + 1 \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(\log_2(8+x) + 1 | -x)$$

Funktion t des Trägergraphen bestimmen:

Erläuterung: *Trägergraphen*

Der Trägergraph besteht aus allen möglichen Punkten C_n , die durch die Drehung entstehen können.

Man stellt sich dies als Bewegung vor bei der der Punkt C_n betrachtet wird.

$x'' = \log_2(x+8) + 1$ nach x auflösen:

$$x'' = \log_2(x+8) + 1 \quad | \quad -1$$

$$x'' - 1 = \log_2(x+8) \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

$$2^{x''-1} = 2^{\log_2(x+8)}$$

$$2^{x''-1} = x + 8 \quad | \quad -8$$

$$x = 2^{x''-1} - 8$$

$x = 2^{x''-1} - 8$ einsetzen in y'' :

$$y'' = -x = -(2^{x''-1} - 8) = -2^{x''-1} + 8$$

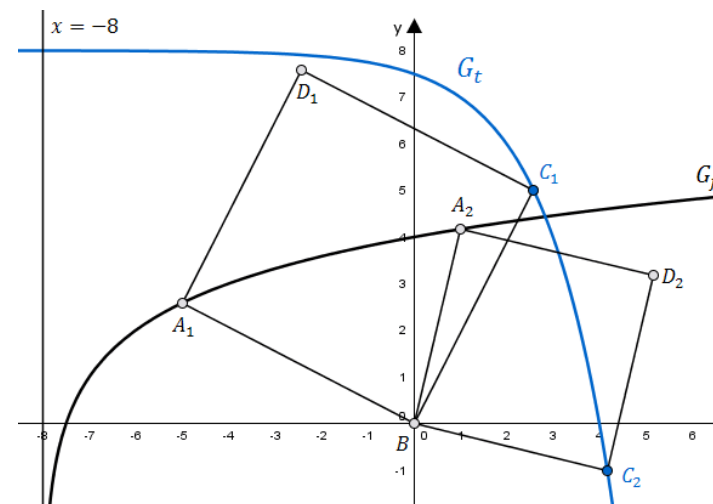
$$\Rightarrow t : y = -2^{x-1} + 8$$

Skizze

Wertetabelle anfertigen:

x	-2	0	3
$y = -2^{x-1} + 8$	7,88	7,5	4

Trägergraph t in das Koordinatensystem zu 1.2 einzeichnen:



Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Für das Quadrat $A_3 B C_3 D_3$ gilt: $A_3(-4|3)$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D_3 .

Lösung zu Aufgabe B1.5

Lage eines Punktes

$$C_n(\log_2(x+8) + 1 | -x) \quad (\text{Teilergebnis von Aufgabe B 1.4})$$

$$A_3(-4|3)$$

Der Punkt A_3 hat die x -Koordinate -4 .

Koordinaten des Punktes C_3 bestimmen:

$$C_3(\log_2(-4+8) + 1 | -(-4)) = (\log_2(4) + 1 | 4) = (3|4)$$

Koordinaten des Punktes D_3 bestimmen:

$$\vec{D}_3 = \vec{A}_3 + \vec{C}_3$$

$$\vec{D}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_3(-1|7)$$

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Für das Quadrat $A_4 B C_4 D_4$ gilt: Der Punkt D_4 liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Ermitteln Sie rechnerisch die x -Koordinate des Punktes A_4 .

Lösung zu Aufgabe B1.6

Lage eines Punktes

D_4 liegt auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten.

Da der Punkt B im Ursprung und der Punkt D_4 auf der Winkelhalbierenden des II. Quadranten liegt, folgt:

Der Punkt A_4 liegt auf der x -Achse. Seine y -Koordinate ist somit gleich Null.

$$\Rightarrow A_4(x|0)$$

Für alle Punkte A_n gilt: $A_n(x|\log_2(x+8)+1)$

Für den Punkt A_4 gilt also:

$$\log_2(x+8)+1=0 \quad | \quad -1$$

$$\log_2(x+8)=-1 \quad | \quad \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus \log_2 kann durch die Exponentialfunktion 2^x aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_2 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\log_2 x} = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$$

$$2^{\log_2(x+8)} = 2^{-1}$$

$$x+8 = 2^{-1} \quad | \quad -8$$

$$x = 2^{-1} - 8$$

$$\Rightarrow x = -7,5$$