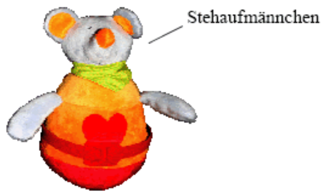
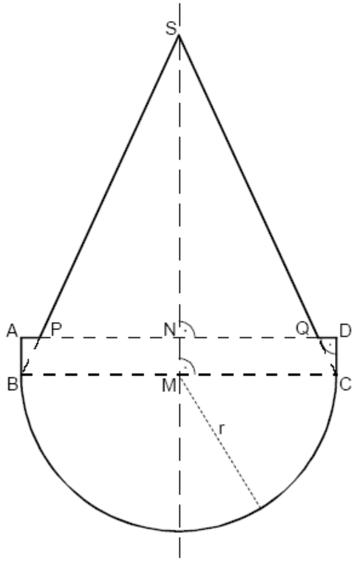
Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik II Aufgabe A3

Aufgabe A3.1 (5 Punkte)



Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt des Grundkörpers eines Stehaufmännchens.
MS ist die Symmetrieachse.
Es gilt: $\overline{MB} = 6,0$ cm ; $r = \overline{MB} = \overline{MC}$; $\overline{AB} = 1,4$ cm ; $\measuredangle BSC = 50°$.

Berechnen Sie das Volumen V des Grundkörpers. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

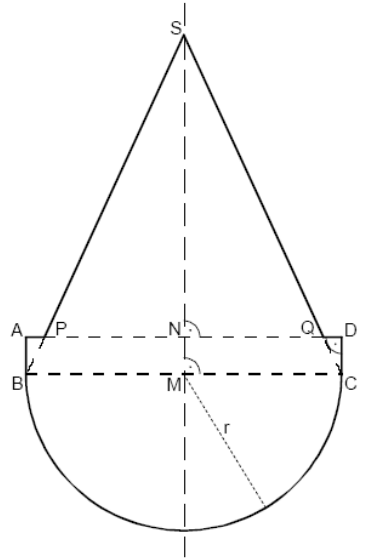


Lösung

Aufgabe A3.1 (5 Punkte)

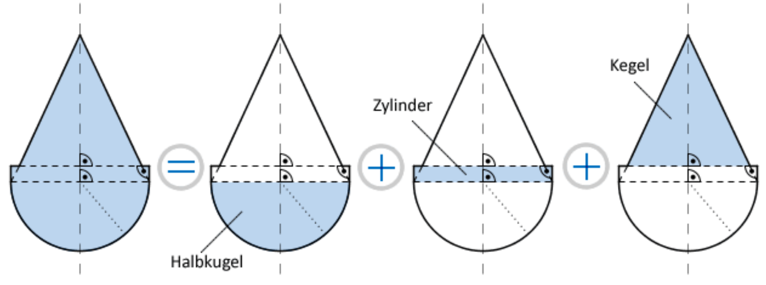
Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt des Grundkörpers eines Stehaufmännchens.
MS ist die Symmetrieachse.
Es gilt: $\overline{MB} = 6,0$ cm ; $r = \overline{MB} = \overline{MC}$; $\overline{AB} = 1,4$ cm ; $\measuredangle BSC = 50°$.

Berechnen Sie das Volumen V des Grundkörpers. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.



Lösung zu Aufgabe A3.1

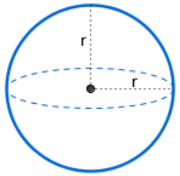
Volumen eines geometrischen Körpers



$$V = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$$

Volumen der Halbkugel bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Kugel*



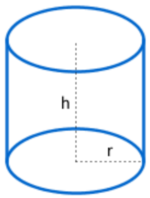
Eine Kugel mit Radius r hat ein Volumen von:

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

$\frac{1}{2} \cdot V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{MB}^3 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 6^3 \cdot \pi = 144\pi \text{ cm}^3$

Volumen des Zylinders bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders*



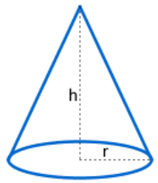
Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$

$V_{\text{Zylinder}} = \overline{MB}^2 \cdot \pi \cdot \overline{AB} = 6^2 \cdot \pi \cdot 1,4 = 50,4\pi \text{ cm}^3$

Volumen des Kegels bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

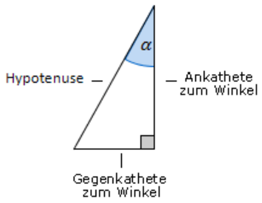
$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

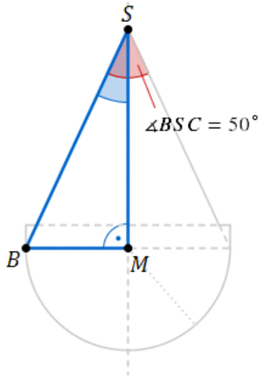
$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{NP}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SN}$

$\overline{NP}$ und $\overline{SN}$ sind unbekannt. Es folgen nun zwei **Nebenrechnungen**:

1) $\overline{MS}$ bestimmen

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*





Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\measuredangle BSM = \frac{\overline{MB}}{\overline{MS}} \quad \Big| \quad \cdot\frac{\overline{MS}}{\tan\measuredangle BSM}$$

$$\overline{MS} = \frac{\overline{MB}}{\tan\measuredangle BSM}$$

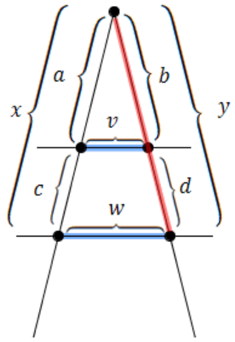
$$\overline{MS} = \frac{6}{\tan\left(\frac{50^\circ}{2}\right)}$$

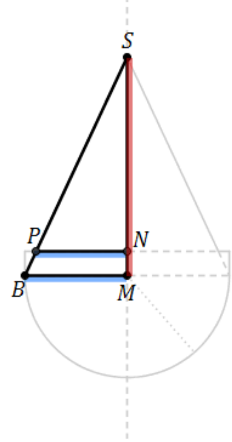
$$\Rightarrow \quad \overline{MS} \approx 12{,}9 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{SN} = \overline{MS} - \overline{AB} = 12{,}9 - 1{,}4 = 11{,}5 \text{ cm}$$

2) $\overline{NP}$ mit dem Vierstreckensatz bestimmen:

Erläuterung: *Vierstreckensatz*





Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

In diesem Fall (wenn S der Punkt ist, aus dem der Strahl kommt) gilt nach 2):

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{MS}}$$

$$\frac{\overline{NP}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{SN}}{\overline{MS}}$$

$$\frac{\overline{NP}}{6} = \frac{11{,}5}{12{,}9} \quad \Big| \quad \cdot 6$$

$$\Rightarrow \quad \overline{NP} \approx 5{,}3 \text{ cm}$$

Somit ist das Volumen des Kegels:

$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{NP}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SN} = \frac{1}{3} \cdot 5,3^2 \cdot \pi \cdot 11,5 \approx 107,7\pi \ \text{cm}^3$

Das Volumen des Grundkörper ist dann:

$V = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Kugel}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}} = 144\pi + 50,4\pi + 107,7\pi \approx 949 \ \text{cm}^3$