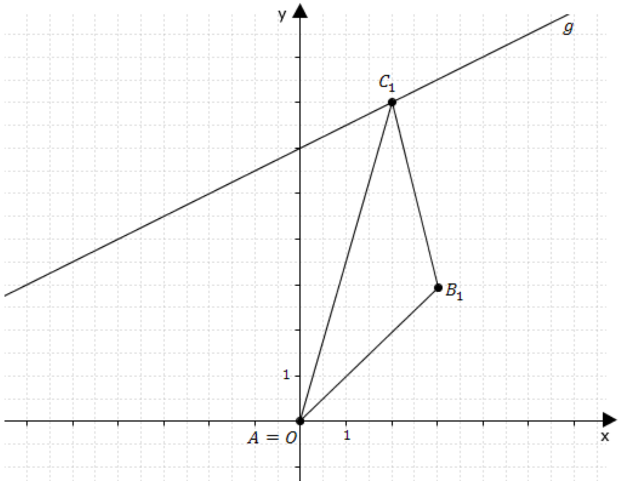
Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken $A\,B_n\,C_n$, wobei die Punkte $C_n\left(x|\frac{1}{2}x+6\right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x+6$ liegen ($\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Die Basiswinkel $B_n\,A\,C_n$ und $A\,C_n\,B_n$ der Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ haben das Maß $30°$.



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck $A\,B_1\,C_1$ für $x=2$ eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B_2\,C_2$ für $x=-3$ ein.

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken $[A\,B_n]$ und $[A\,C_n]$ gilt:
$\overline{A\,B_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overline{A\,C_n}$.
Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:
$A(x)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\left(1,25x^2+6x+36\right)$ FE

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken $A\,B_n\,C_n$ hat das Dreieck $A\,B_0\,C_0$ den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_0.

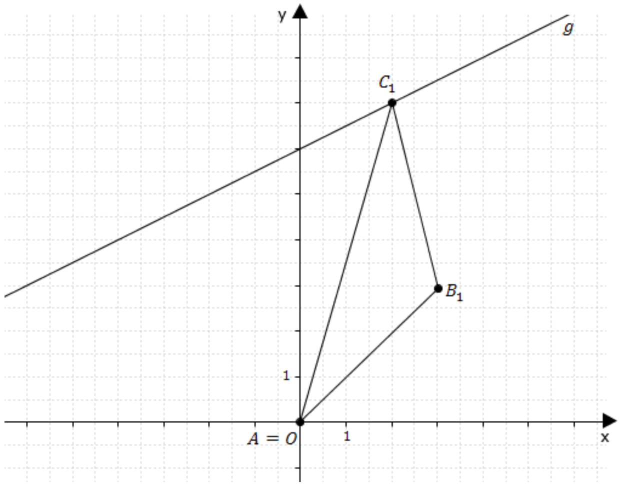
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A2.

Der Punkt $A(0|0)$ ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken $A\,B_n\,C_n$, wobei die Punkte $C_n\left(x|\frac{1}{2}x+6\right)$ auf der Geraden g mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x+6$ liegen ($\mathbb{G}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$). Die Basiswinkel $B_n\,A\,C_n$ und $A\,C_n\,B_n$ der Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ haben das Maß 30°.



Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck $A\,B_1\,C_1$ für $x=2$ eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B_2\,C_2$ für $x=-3$ ein.

Lösung zu Aufgabe A2.1

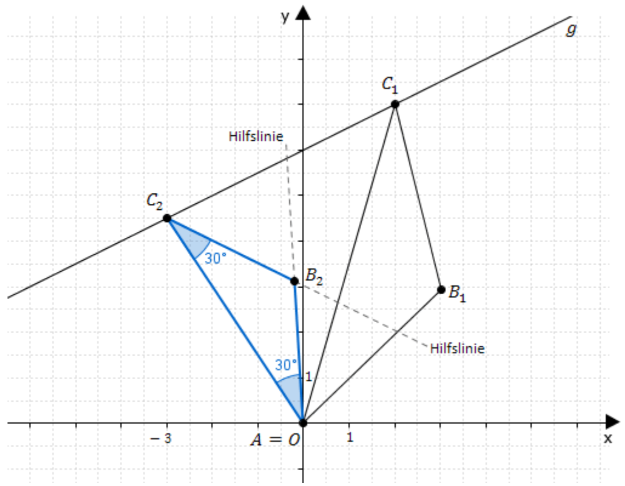
Skizze

Dreieck $A\,B_2\,C_2$ für $x=-3$ einzeichnen:

Erläuterung: *Erläuterung*

C_2 entspricht dem Punkt auf der Geraden g mit der Abszisse $x=-3$. Durch das Verbinden der Punkte C_2 und A erhält man die Seite $[C_2\,A]$ des Dreiecks.

Durch das Einzeichnen von Hilfslinien die durch die Punkte A und C_2 gehen, die jeweils einen Winkel von 30° mit der Seite $[C_2\,A]$ bilden, kann der Punkt B_2 ermittelt werden. Er entspricht dem Schnittpunkt der Hilfslinien.

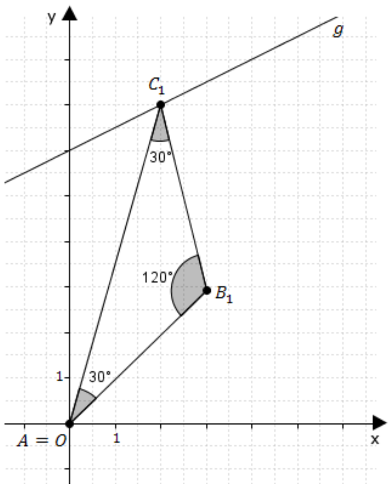


Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken $[A\,B_n]$ und $[A\,C_n]$ gilt:
$\overline{A\,B_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overline{A\,C_n}$.
Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt A der Dreiecke $A\,B_n\,C_n$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n gilt:
$A(x)=\frac{1}{4\sqrt{3}}\cdot\left(1,25x^2+6x+36\right)$ FE

Lösung zu Aufgabe A2.2

Seite eines Dreiecks bestimmen



Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\measuredangle B_n\,A\,C_n = \measuredangle A\,C_n\,B_n = 30°$

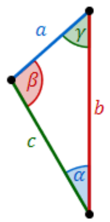
$C_n\,\left(x|\frac{1}{2}x+6\right)$

Maß des Winkels $\measuredangle C_n\,B_n\,A$ bestimmen:

> Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*
>
> Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.
>
> Im Dreieck $A\,B_n\,C_n$ gilt also: $\measuredangle C_n\,B_n\,A + \measuredangle B_n\,A\,C_n + \measuredangle A\,C_n\,B_n = 180°$

$\measuredangle C_n\,B_n\,A = 180° - (30° + 30°) = 120°$

Länge der Seite $[A\,B_n]$ mit dem Sinussatz bestimmen:

> Erläuterung: *Sinussatz*
>
> 
>
>
> In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:
>
> $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
>
> Im Dreieck $A\,B_n\,C_n$ gilt somit: $\frac{\overline{A\,B_n}}{\sin\measuredangle A\,C_n\,B_n} = \frac{\overline{A\,C_n}}{\sin\measuredangle C_n\,B_n\,A}$

$$\frac{\overline{A\,B_n}}{\sin\measuredangle A\,C_n\,B_n} = \frac{\overline{A\,C_n}}{\sin\measuredangle C_n\,B_n\,A}$$

$$\frac{\overline{A\,B_n}}{\sin 30°} = \frac{\overline{A\,C_n}}{\sin 120°} \,|\cdot \sin 30°$$

$$\overline{A\,B_n} = \frac{\sin 30°}{\sin 120°}\cdot\overline{A\,C_n}$$

> Erläuterung: *Sinus eines Winkels*
>
> Die Sinuswerte können in der Formelsammlung nachgeschlagen werden. Für den Winkel $120°$ muss der Wert bei $60°$ abgelesen werden, da die zwei Winkel, die im ersten Quadranten liegen, denselben Sinuswert haben.

$$\overline{A\,B_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\overline{A\,C_n}$$

$$\Rightarrow \overline{A\,B_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overline{A\,C_n}$$

Länge eines Vektors

Um den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen zu können, benötigt man die Länge der Seite

$[A\,C_n]$. Sie entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{A\,C_n}$.

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Vektor $\overrightarrow{A\,C_n}$, der die Punkte A und C_n verbindet, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{A\,C_n} = \underbrace{\overrightarrow{C_n} - \overrightarrow{A}}_{\text{„Spitze minus Fuss“}} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A\,C_n} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch: $\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{A\,C_n} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Erste binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$

Die erste binomische Formel wird auf $\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$ angewendet:

$$\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 6 + 6^2 = \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36$$

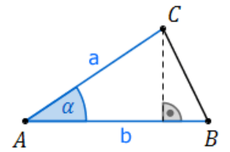
$$\overline{A\,C_n} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36}$$

$$\Rightarrow \overline{A\,C_n} = \sqrt{1,25x^2 + 6x + 36}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Flächeninhalt A des Dreiecks $A\,B_n\,C_n$ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck $A\,B\,C$ zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{A\,B_n} \cdot \overline{A\,C_n} \cdot \sin\measuredangle B_n\,A\,C_n$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{A\,B_n}$ wird durch $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{A\,C_n}$ ersetzt (siehe Zwischenergebnis dieser Aufgabe).

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{A\,C_n} \cdot \overline{A\,C_n} \cdot \sin 30°$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{A\,C_n} \cdot \overline{A\,C_n} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{4\sqrt{3}}\overline{A\,C_n}^2$$

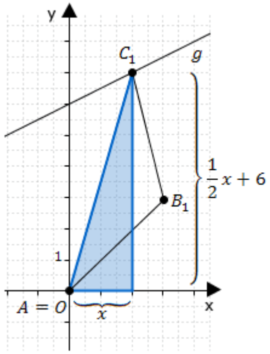
$$A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{1,25x^2 + 6x + 36}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \left(1,25x^2 + 6x + 36\right)$$

Alternative Lösung

Die Länge der Seite $[A\,C]$ kann auch mit dem Satz des Pythagoras bestimmen werden:

Erläuterung: *Erläuterung*



Die Abszisse x und die Ordinate $\frac{1}{2}x + 6$ des Punktes C_n bilden zusammen mit dem Punkt A ein rechtwinkliges Dreieck.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit:

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$$

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$$

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36$$

$$\overline{AC_n}^2 = 1{,}25x^2 + 6x + 36$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken AB_nC_n hat das Dreieck AB_0C_0 den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_0.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Extremwertaufgabe

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

Dreiecke AB_nC_n haben einen, von der Abszisse x des Punktes C_n abhängigen, Flächeninhalt $A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1{,}25x^2 + 6x + 36) = \left(\frac{1{,}25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}\right)$ FE.

Punkte C_n haben die Koordinaten $\left(x|\frac{1}{2}x + 6\right)$.

x_S-Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion $y = \frac{1{,}25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}$ bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt des Dreiecks $A_nB_nC_n$ ist für verschiedene x unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten x-Wert ist der Flächeninhalt $A(x) = \left(\frac{1{,}25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}\right)$ FE am kleinsten (minimal).

Die Funktion $y = \frac{1{,}25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}$ ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Den kleinsten Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes $S(x_S|y_S)$ einer Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ sind gegeben durch:

$$S\left(\frac{-b}{2a}|c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{\frac{6}{4\sqrt{3}}}{2 \cdot \frac{1{,}25}{4\sqrt{3}}} = -2{,}4$$

$\Rightarrow$ Für $x_S = -2{,}4$ ist $A(x)$ minimal.

$\Rightarrow x_{C_0} = -2{,}4$

$\Rightarrow C_0\left(-2{,}4|\frac{1}{2} \cdot (-2{,}4) + 6\right)$

$\Rightarrow C_0\,(-2{,}4|4{,}8)$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

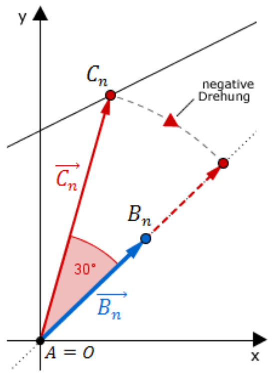
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte C_n. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A2.4

2-dimensionale Geometrie

$$C_n\left(x|\frac{1}{2}x+6\right) \Rightarrow \overrightarrow{C_n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x+6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Erläuterung*



Durch Drehung der Vektoren $\overrightarrow{C_n}$ um den Winkel $\measuredangle B_n A C_n = 30°$, entstehen Vektoren die in die gleiche Richtung der Vektoren $\overrightarrow{B_n}$ zeigen.

Eine Drehung im Uhrzeigesinn ist eine negative Drehung, deswegen ist hier der Drehwinkel gleich $-30°$.

Drehen der Vektoren $\overrightarrow{C_n}$ um $-30°$:

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x+6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Sinus eines negativen Winkels, Kosinus eines negativen Winkels*

Für den Sinus und Kosinus eines negativen Winkels, gilt:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30°) & \sin(30°) \\ -\sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x+6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x+6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor erfolgt über das Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \\ a_3 \cdot x + a_4 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x+6\right) \\ -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x+6\right) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}x + 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Strecken der Vektoren:

Erläuterung: *Erläuterung*

Um die gedrehten Vektoren $\overrightarrow{C_n'}$ auf $\overrightarrow{B_n}$ zu strecken, werden die Vektoren $\overrightarrow{C_n'}$ mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ multipliziert.

Grund hierfür: $\overline{A\,B_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{A\,C_n}$ (siehe Aufgabe A2.2)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}x + 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{3}}x + \frac{3}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{4}x - 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 \cdot x + 1,73 \\ -0,04 \cdot x + 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B_n\ (0,64 \cdot x + 1,73 | -0,04 \cdot x + 3)$