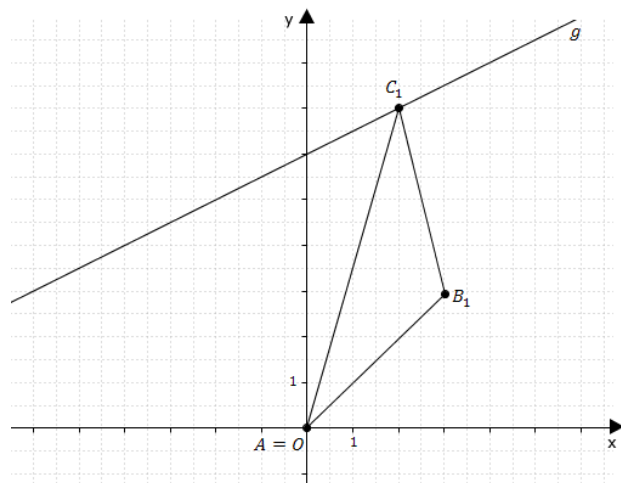


## Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe A2

### Aufgabe A2.

Der Punkt  $A(0|0)$  ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken  $AB_nC_n$ , wobei die Punkte  $C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6\right)$  auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + 6$  liegen ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Die Basiswinkel  $B_nAC_n$  und  $AC_nB_n$  der Dreiecke  $AB_nC_n$  haben das Maß  $30^\circ$ .



### Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck  $AB_1C_1$  für  $x = 2$  eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck  $AB_2C_2$  für  $x = -3$  ein.

### Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken  $[AB_n]$  und  $[AC_n]$  gilt:

$$\overline{AB_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}.$$

Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $AB_nC_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $C_n$  gilt:

$$A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) \quad \text{FE}$$

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken  $AB_nC_n$  hat das Dreieck  $AB_0C_0$  den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $C_0$ .

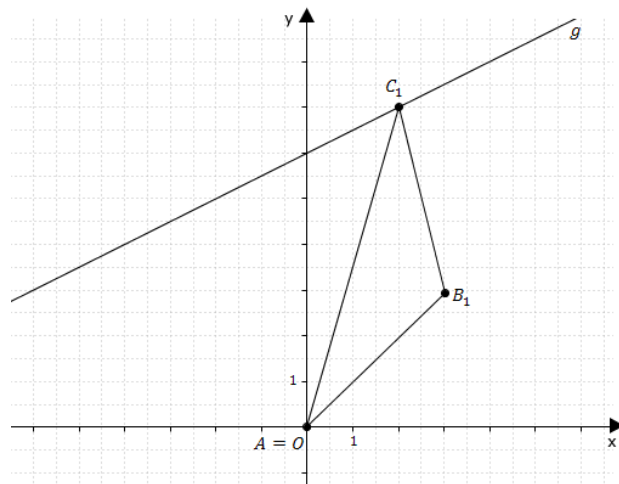
### Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $B_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $C_n$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Lösung

## Aufgabe A2.

Der Punkt  $A(0|0)$  ist gemeinsamer Eckpunkt von gleichschenkligen Dreiecken  $AB_nC_n$ , wobei die Punkte  $C_n \left(x \mid \frac{1}{2}x + 6\right)$  auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = \frac{1}{2}x + 6$  liegen ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Die Basiswinkel  $B_nAC_n$  und  $AC_nB_n$  der Dreiecke  $AB_nC_n$  haben das Maß  $30^\circ$ .



## Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

In das Koordinatensystem zu 2.0 ist das Dreieck  $AB_1C_1$  für  $x = 2$  eingezeichnet. Zeichnen Sie das Dreieck  $AB_2C_2$  für  $x = -3$  ein.

## Lösung zu Aufgabe A2.1

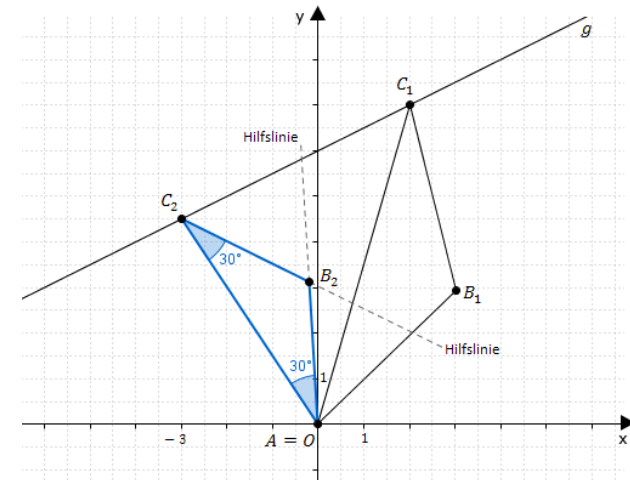
Skizze

Dreieck  $AB_2C_2$  für  $x = -3$  einzeichnen:

Erläuterung: *Erläuterung*

$C_2$  entspricht dem Punkt auf der Geraden  $g$  mit der Abszisse  $x = -3$ . Durch das Verbinden der Punkte  $C_2$  und  $A$  erhält man die Seite  $[C_2A]$  des Dreiecks.

Durch das Einzeichnen von Hilfslinien die durch die Punkte  $A$  und  $C_2$  gehen, die jeweils einen Winkel von  $30^\circ$  mit der Seite  $[C_2A]$  bilden, kann der Punkt  $B_2$  ermittelt werden. Er entspricht dem Schnittpunkt der Hilfslinien.



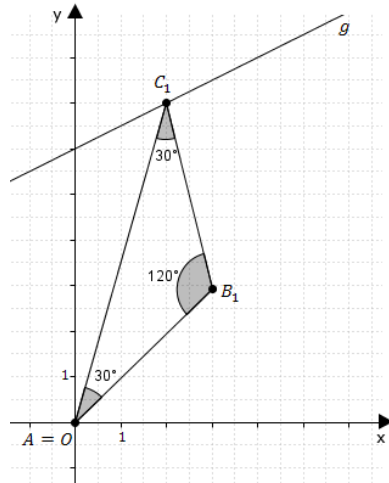
## Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Längenverhältnis der Strecken  $[AB_n]$  und  $[AC_n]$  gilt:

$$\overline{AB_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}.$$

Bestätigen Sie sodann durch Rechnung, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Dreiecke  $AB_nC_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $C_n$  gilt:

$$A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) \quad \text{FE}$$

Lösung zu Aufgabe A2.2**Seite eines Dreiecks bestimmen**

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\angle B_n A C_n = \angle A C_n B_n = 30^\circ$$

$$C_n \left( x \mid \frac{1}{2}x + 6 \right)$$

Maß des Winkels  $\angle C_n B_n A$  bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

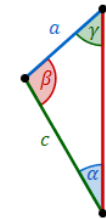
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

Im Dreieck  $A B_n C_n$  gilt also:  $\angle C_n B_n A + \angle B_n A C_n + \angle A C_n B_n = 180^\circ$

$$\angle C_n B_n A = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

Länge der Seite  $[A B_n]$  mit dem Sinussatz bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $A B_n C_n$  gilt somit:  $\frac{\overline{A B_n}}{\sin \angle A C_n B_n} = \frac{\overline{A C_n}}{\sin \angle C_n B_n A}$

$$\frac{\overline{A B_n}}{\sin \angle A C_n B_n} = \frac{\overline{A C_n}}{\sin \angle C_n B_n A}$$

$$\frac{\overline{A B_n}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{A C_n}}{\sin 120^\circ} \mid \cdot \sin 30^\circ$$

$$\overline{A B_n} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} \cdot \overline{A C_n}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

Die Sinuswerte können in der Formelsammlung nachgeschlagen werden. Für den Winkel  $120^\circ$  muss der Wert bei  $60^\circ$  abgelesen werden, da die zwei Winkel, die im ersten Quadranten liegen, denselben Sinuswert haben.

$$\overline{A B_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \overline{A C_n}$$

$$\Rightarrow \overline{A B_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{A C_n}$$

**Länge eines Vektors**

Um den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen zu können, benötigt man die Länge der Seite

$[AC_n]$ . Sie entspricht der Länge des Vektors  $\overrightarrow{AC_n}$ .

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Vektor  $\overrightarrow{AC_n}$ , der die Punkte  $A$  und  $C_n$  verbindet, hat die Koordinaten:

$$\overrightarrow{AC_n} = \underbrace{\overrightarrow{C_n} - \overrightarrow{A}}_{\text{„Spitze minus Fuss“}} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge  $\bar{a}$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:  $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{AC_n} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2}$$

Erläuterung: *Binomische Formel*

Erste binomische Formel:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Die erste binomische Formel wird auf  $\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$  angewendet:

$$\left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 6 + 6^2 = \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36$$

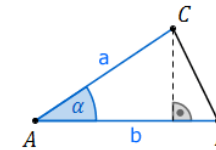
$$\overline{AC_n} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36}$$

$$\Rightarrow \overline{AC_n} = \sqrt{1,25x^2 + 6x + 36}$$

**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks  $AB_nC_n$  bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB_n} \cdot \overline{AC_n} \cdot \sin \angle B_n A C_n$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{AB_n}$  wird durch  $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC_n}$  ersetzt (siehe Zwischenergebnis dieser Aufgabe).

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{AC_n} \cdot \overline{AC_n} \cdot \sin 30^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \overline{AC_n} \cdot \overline{AC_n} \cdot \frac{1}{2}$$

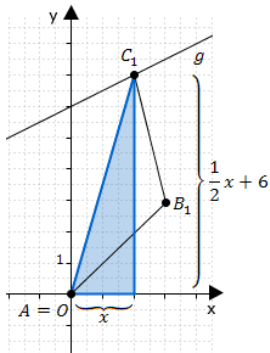
$$A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \overline{AC_n}^2$$

$$A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt{1,25x^2 + 6x + 36}\right)^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36)$$

**Alternative Lösung**

Die Länge der Seite  $[AC]$  kann auch mit dem Satz des Pythagoras bestimmen werden:

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Abszisse  $x$  und die Ordinate  $\frac{1}{2}x + 6$  des Punktes  $C_n$  bilden zusammen mit dem Punkt  $A$  ein rechtwinkliges Dreieck.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt somit:

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$$

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x + 6\right)^2$$

$$\overline{AC_n}^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^2 + 6x + 36$$

$$\overline{AC_n}^2 = 1,25x^2 + 6x + 36$$

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken  $AB_nC_n$  hat das Dreieck  $AB_0C_0$  den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $C_0$ .

### Lösung zu Aufgabe A2.3

### Extremwertaufgabe

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

Dreiecke  $AB_nC_n$  haben einen, von der Abszisse  $x$  des Punktes  $C_n$  abhängigen, Flächeninhalt  $A(x) = \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot (1,25x^2 + 6x + 36) = \left(\frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}\right)$  FE.

Punkte  $C_n$  haben die Koordinaten  $\left(x \mid \frac{1}{2}x + 6\right)$ .

$x_S$ -Koordinate des Scheitelpunktes der Funktion  $y = \frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}$  bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_nB_nC_n$  ist für verschiedene  $x$  unterschiedlich groß.

Für einen bestimmten  $x$ -Wert ist der Flächeninhalt  $A(x) = \left(\frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}\right)$  FE am kleinsten (minimal).

Die Funktion  $y = \frac{1,25}{4\sqrt{3}}x^2 + \frac{6}{4\sqrt{3}}x + \frac{36}{4\sqrt{3}}$  ist eine quadratische Funktion. Ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel. Den kleinsten Funktionswert hat sie in ihrem Scheitelpunkt.

Die Koordinaten des Scheitelpunktes  $S(x_S|y_S)$  einer Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$  sind gegeben durch:

$$S\left(\frac{-b}{2a} \mid c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = -\frac{\frac{6}{4\sqrt{3}}}{2 \cdot \frac{1,25}{4\sqrt{3}}} = -2,4$$

$\Rightarrow$  Für  $x_S = -2,4$  ist  $A(x)$  minimal.

$$\Rightarrow x_{C_0} = -2,4$$

$$\Rightarrow C_0\left(-2,4 \mid \frac{1}{2} \cdot (-2,4) + 6\right)$$

$$\Rightarrow C_0(-2,4 \mid 4,8)$$

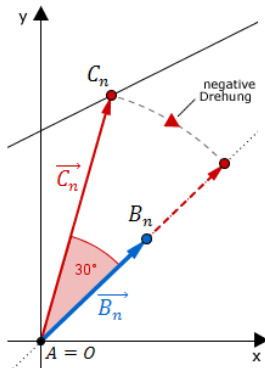
**Aufgabe A2.4** (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte  $B_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $C_n$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A2.4**2-dimensionale Geometrie**

$$C_n \left( x \mid \frac{1}{2}x + 6 \right) \Rightarrow \vec{C}_n = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Erläuterung*



Durch Drehung der Vektoren  $\vec{C}_n$  um den Winkel  $\angle B_n A C_n = 30^\circ$ , entstehen Vektoren die in die gleiche Richtung der Vektoren  $\vec{B}_n$  zeigen.

Eine Drehung im Uhrzeigersinn ist eine negative Drehung, deswegen ist hier der Drehwinkel gleich  $-30^\circ$ .

Drehen der Vektoren  $\vec{C}_n$  um  $-30^\circ$ :

Erläuterung: *Drehmatrix*

Ist  $\alpha$  der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende

$$\text{Drehmatrix: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Sinus eines negativen Winkels, Kosinus eines negativen Winkels*

Für den Sinus und Kosinus eines negativen Winkels, gilt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & \sin(30^\circ) \\ -\sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x + 6 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor erfolgt über das Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \\ a_3 \cdot x + a_4 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}x + 6) \\ -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\frac{1}{2}x + 6) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}x + 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Strecken der Vektoren:

Erläuterung: *Erläuterung*

Um die gedrehten Vektoren  $\vec{C}_n$  auf  $\vec{B}_n$  zu strecken, werden die Vektoren  $\vec{C}_n$  mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  multipliziert.

Grund hierfür:  $\overline{AB}_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \overline{AC}_n$  (siehe Aufgabe A2.2)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}x + 3 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\sqrt{3}}x + \frac{3}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{4}x - 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,64 \cdot x + 1,73 \\ -0,04 \cdot x + 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_n (0,64 \cdot x + 1,73 | -0,04 \cdot x + 3)$$