

## Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe B1

### Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion  $f_1$  mit der Gleichung  $y = -\log_{0,5}(x+2) + 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f_1$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an und zeichnen Sie den Graphen zu  $f_1$  für  $x \in [-1, 5; 9]$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-3 \leq x \leq 11$ ;  $-5 \leq y \leq 8$ .

#### Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f_1$  wird durch orthogonale Affinität mit der  $x$ -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab  $k = 2$  sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$  auf den Graphen der Funktion  $f_2$  abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion  $f_2$  die Gleichung  $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 3$  hat ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

#### Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f_2$  an und zeichnen Sie den Graphen zu  $f_2$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

#### Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Punkte  $A_n(x | -2 \cdot \log_{0,5} x - 3)$  auf dem Graphen zu  $f_2$  und Punkte  $D_n(x | -\log_{0,5}(x+2) + 2)$  auf dem Graphen zu  $f_1$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind zusammen mit Punkten  $B_n$

und  $C_n$  die Eckpunkte von Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$ . Es gilt:  $\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Zeichnen Sie das Parallelogramm  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 1$  und das Parallelogramm  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 4$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von  $x$  es Parallelogramme  $A_n B_n C_n D_n$  gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Aufgabe B1.5 (1 Punkt)

Die Winkel  $B_n A_n D_n$  haben stets das gleiche Maß.

Berechnen Sie das Maß der Winkel  $B_n A_n D_n$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Das Parallelogramm  $A_3 B_3 C_3 D_3$  ist eine Raute.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $A_3$ .

[Teilergebnis:  $\overrightarrow{A_n D_n}(x) = \left[ \log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) + 5 \right]$  LE]

## Lösung

### Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion  $f_1$  mit der Gleichung  $y = -\log_{0,5}(x+2) + 2$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f_1$  sowie die Gleichung der Asymptote  $h$  an und zeichnen Sie den Graphen zu  $f_1$  für  $x \in [-1, 5; 9]$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-3 \leq x \leq 11$ ;  $-5 \leq y \leq 8$ .

#### Lösung zu Aufgabe B1.1

##### Definitionsmenge einer Funktion

$$f_1 : y = -\log_{0,5}(x+2) + 2$$

Definitionsmenge bestimmen:

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion  $\log_{0,5}(x+2)$  ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche  $x$ -Werte gilt:  $x+2 > 0$ .

$$x+2 > 0 \quad | \quad -2$$

$$x > -2$$

$$\Rightarrow D_{f_1} = ]-2; \infty[$$

##### Asymptoten einer Funktion

$$D_{f_1} = ]-2; \infty[$$

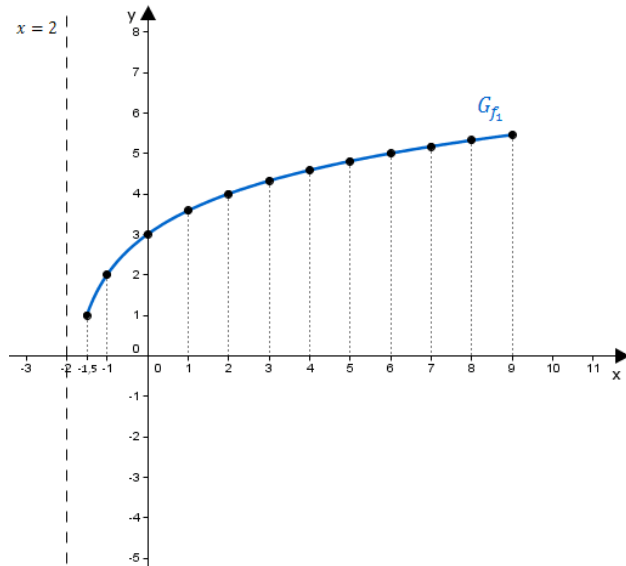
$$\Rightarrow h : x = -2 \quad (\text{senkrechte Asymptote})$$

**Skizze**

Wertetabelle mit Hilfe des Taschenrechners erstellen:

x	-1,5	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	2	3	3,58	4	4,32	4,58	4,81	5	5,17	5,32	5,46

Punkte im Koordinatensystem eintragen und miteinander verbinden:

**Aufgabe B1.2** (3 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f_1$  wird durch orthogonale Affinität mit der  $x$ -Achse als Affinitätsachse und dem Affinitätsmaßstab  $k = 2$  sowie anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$  auf den Graphen der Funktion  $f_2$  abgebildet.

Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion  $f_2$  die Gleichung  $y = -2 \cdot \log_{0,5} x - 3$  hat ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ).

**Lösung zu Aufgabe B1.2****Orthogonale Affinität**

$$f_1 : y = -\log_{0,5}(x + 2) + 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\log_{0,5}(x + 2) + 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Orthogonale Affinität*

Matrixdarstellung einer orthogonalen Affinität mit der  $x$ -Achse als Affinitätsachse und einem Affinitätsmaßstab  $k$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hier ist  $k = 2$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\log_{0,5}(x + 2) + 2 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \log_{0,5}(x + 2) + 4 \end{pmatrix}$$

**Verschiebung um einen Vektor**

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \log_{0,5}(x + 2) + 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2 \\ -2 \log_{0,5}(x + 2) - 3 \end{pmatrix}$$

$$x'' = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = x'' - 2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = x'' + 2$  wird in  $y''$  eingesetzt.

$$y'' = -2 \log_{0,5}(x'' - 2 + 2) - 3$$

$$y'' = -2 \log_{0,5} x'' - 3$$

Erläuterung:

Anstelle von  $y''$  und  $x''$  wird  $y$  und  $x$  geschrieben.

$$\Rightarrow f_2 : y = -2 \log_{0,5} x - 3$$

#### Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion  $f_2$  an und zeichnen Sie den Graphen zu  $f_2$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

#### Lösung zu Aufgabe B1.3

##### Definitionsmenge einer Funktion

$$f_2 : y = -2 \log_{0,5} x - 3$$

Definitionsmenge bestimmen:

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion  $\log_{0,5} x$  ist nur für positive Werte definiert. Das ist der Fall, wenn  $x > 0$  ist.

$$x > 0$$

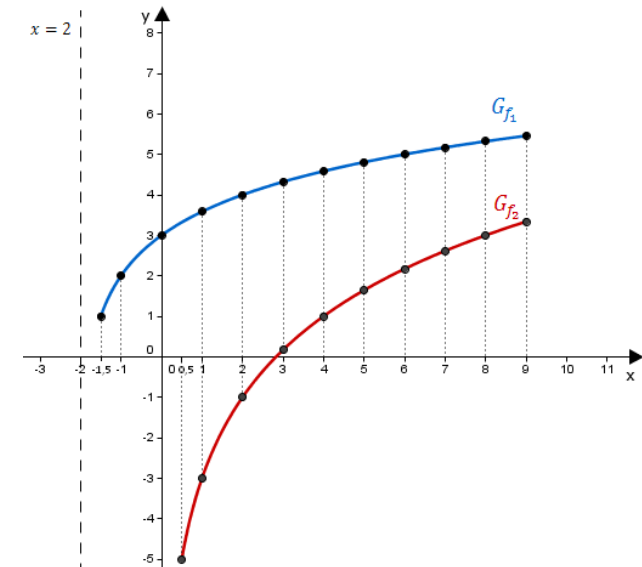
$$\Rightarrow D_{f_2} = ]0; \infty[$$

##### Skizze

Wertetabelle mit Hilfe des Taschenrechners erstellen:

x	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-5	-3	-1	0,17	1	1,64	2,17	2,61	3	3,34

Punkte im Koordinatensystem eintragen und miteinander verbinden:



#### Aufgabe B1.4 (4 Punkte)

Punkte  $A_n(x | -2 \cdot \log_{0,5} x - 3)$  auf dem Graphen zu  $f_2$  und Punkte  $D_n(x | -\log_{0,5}(x+2) + 2)$  auf dem Graphen zu  $f_1$  haben dieselbe Abszisse  $x$  und sind zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $C_n$  die Eckpunkte von Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$ . Es gilt:  $\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .  
Zeichnen Sie das Parallelogramm  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 1$  und das Parallelogramm  $A_2 B_2 C_2 D_2$

für  $x = 4$  in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Belegungen von  $x$  es Parallelegramme  $A_n B_n C_n D_n$  gibt. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

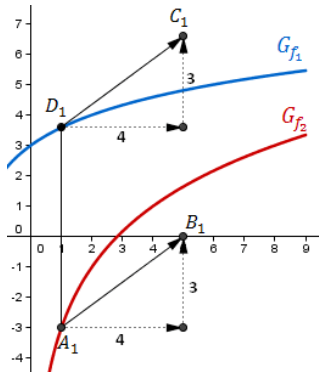
### Lösung zu Aufgabe B1.4

#### Skizze

Parallelegramme  $A_1 B_1 C_1 D_1$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  einzeichnen:

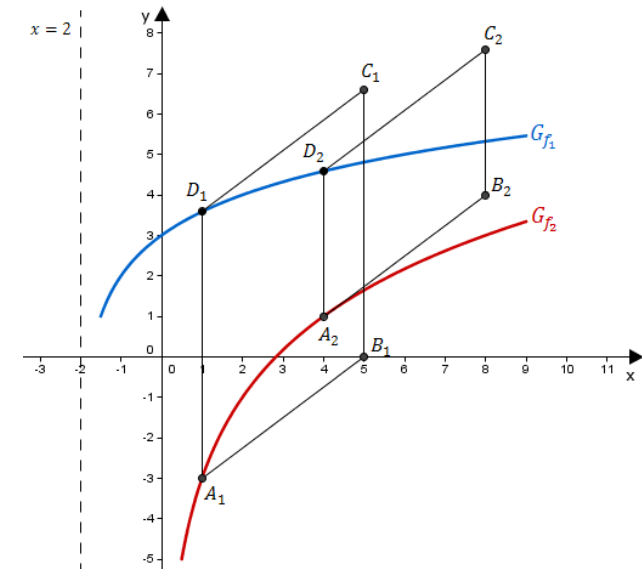
Erläuterung: *Erläuterung*

Punkte  $A_n$  liegen auf  $G_{f_2}$ , Punkte  $D_n$  auf  $G_{f_1}$ .



Bewegt man sich senkrecht, von der Stelle  $x = 1$  aus, zu den Graphen der Funktionen, so können die Punkte  $A_1$  und  $D_1$  eingezeichnet werden.

Der Punkt  $C_1$  entspricht dann den um den Vektor  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  verschobene Punkt  $D_1$ . Man bewegt sich vom Punkt  $D_1$  aus 4 Längeneinheiten nach rechts und 3 Längeneinheiten nach oben um  $C_1$  zu erreichen. Gleiches gilt für den Punkt  $B_1$  (wegen der Parallelität).



#### Schnittpunkt zweier Funktionen

Schnittpunkt zwischen  $f_1$  und  $f_2$  bestimmen:

Erläuterung: *Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Die Graphen zweier Funktionen schneiden sich dort, wo sie ein übereinstimmendes Wertepaar  $(x, y)$ , einen gemeinsamen Punkt, besitzen.

Man setzt die Funktionsgleichungen gleich und löst nach  $x$  auf.

$$-\log_{0,5}(x+2) + 2 = -2 \log_{0,5} x - 3 \quad | \quad +2 \log_{0,5} x$$

$$2 \log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) + 2 = -3 \quad | \quad -2$$

$$2 \log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) = -5$$

Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*

$$\log_a (s^t) = t \cdot \log_a s$$

$$\log_{0,5} x^2 - \log_{0,5}(x+2) = -5$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

$$\log_a \left( \frac{s}{t} \right) = \log_a s - \log_a t$$

$$\log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = -5$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus  $\log_{0,5}$  kann durch die Exponentialfunktion  $0,5^x$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_{0,5} x = -2 \Rightarrow 0,5^{\log_2 x} = 0,5^{-2} \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{x^2}{x+2} = \underbrace{0,5^{-5}}_{=32} \cdot (x+2)$$

$$x^2 = 32x + 64 \quad | \quad -32x - 64$$

$$x^2 - 32x + 64 = 0$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  können entweder über die Mitternachtsformel oder den Taschenrechner ermittelt werden.

$$\text{Mitternachtsformel: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{a^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_2$  muss ausgeschlossen werden, da  $-1,89$  nicht im Definitionsbereich von  $f_2$  liegt und somit keine gültige Lösung darstellt.

$$x_1 = 33,89 \quad (\text{und} \quad x_2 = -1,89 \notin D_{f_2} = ]0; \infty[ )$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Definitionsbereich von  $f_2$  ist  $D_{f_2} = ]0; \infty[$ . Ein Punkt  $A_n$  (der per Definition auf  $f_2$  liegt) kann es nur geben, wenn  $x > 0$  ist.

An der Stelle  $x = 33,89$ , wo sich die Graphen von  $f_1$  und  $f_2$  schneiden, liegen die Punkte  $A_n$  und  $D_n$  aufeinander und es gibt somit kein Parallelogramm. Es muss also auch  $x < 33,89$  gelten.

Für  $x \in ]0; 33,89[$  gibt es Parallelogramme  $A_n B_n C_n D_n$ .

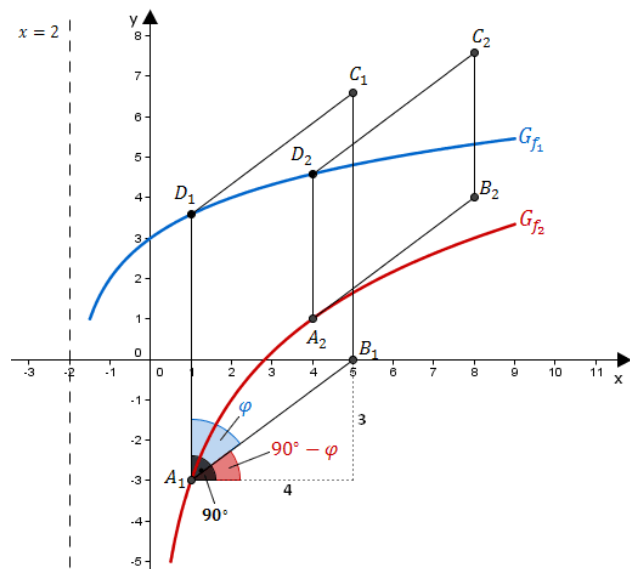
#### Aufgabe B1.5 (1 Punkte)

Die Winkel  $B_n A_n D_n$  haben stets das gleiche Maß.

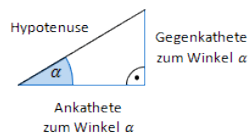
Berechnen Sie das Maß der Winkel  $B_n A_n D_n$ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Lösung zu Aufgabe B1.5

#### *Winkel bestimmen*



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan(90^\circ - \varphi) = \frac{3}{4}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel  $90^\circ - \varphi$  aus  $\tan(90^\circ - \varphi) = \frac{3}{4}$  zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{3}{4} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$90^\circ - \varphi \approx 36,57^\circ$$

$$\varphi = 90^\circ - 36,57^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 53,13^\circ$$

#### Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

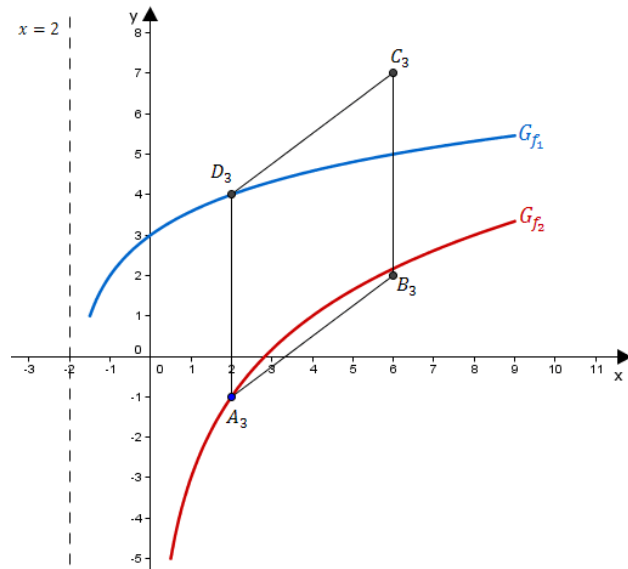
Das Parallelogramm  $A_3 B_3 C_3 D_3$  ist eine Raute.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $A_3$ .

$$[\text{Teilergebnis: } \overline{A_n D_n}(x) = \left[ \log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) + 5 \right] \text{ LE}]$$

#### Lösung zu Aufgabe B1.6

#### Länge eines Vektors



Eigenschaft der Raute:

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Eine Raute hat gleich lange Seiten. Da gegenüberliegende Seiten parallel sind, kann man auch sagen, dass anliegende Seiten gleich lang sind.

Man setzt also die Länge der Seiten  $[A_n D_n]$  und  $[D_n C_n]$  gleich.

$$\overline{A_n D_n} = \overline{D_n C_n}$$

Länge der Seite  $[D_n C_n]$  bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  ist aus Teilaufgabe 1.4 bekannt.

$$\overline{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge  $\bar{a}$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:  $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{D_n C_n} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Länge der Seite  $[A_n D_n]$  bestimmen:

$$\overline{A_n D_n} = \overline{D_n} - \overline{A_n}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Vektoren  $\overline{A_n}$  und  $\overline{D_n}$  sind aus Teilaufgabe 1.4 bekannt.

$$\overline{A_n D_n} = \begin{pmatrix} x \\ -\log_{0,5}(x+2) + 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -2\log_{0,5} x - 3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x+2) + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Logarithmus einer Potenz*

$$\log_a (s^t) = t \cdot \log_a s$$

$$\overline{A_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log_{0,5} x^2 - \log_{0,5}(x+2) + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Logarithmus eines Quotienten*

$$\log_a \left( \frac{s}{t} \right) = \log_a s - \log_a t$$

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) + 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge  $\bar{a}$  eines Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist gegeben durch:  $\bar{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\overline{A_n D_n} = \sqrt{0^2 + \left[ \log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) + 5 \right]^2}$$

$$\overline{A_n D_n} = \log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) + 5$$

$x$ -Wert für  $A_3$  bestimmen:

Erläuterung: *Erläuterung*

Da  $\overline{D_n C_n} = 5$ , gilt:  $\overline{A_n D_n} = 5$

$$\log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) + 5 = 5 \quad | \quad -5$$

$$\log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right) = 0$$

Erläuterung: *Nullstellen einer Logarithmusfunktion*

Da  $\log_a 1 = 0$ , nimmt die Logarithmusfunktion  $\log_{0,5} \left( \frac{x^2}{x+2} \right)$  den Wert Null an, wenn das Argument  $\frac{x^2}{x+2} = 1$  ist.

$$\frac{x^2}{x+2} = 1 \quad | \quad \cdot (x+2)$$

$$x^2 = x+2 \quad | \quad -(x+2)$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$x_2$  muss ausgeschlossen werden, da  $-1$  nicht im Definitionsbereich von  $f_2$  liegt und somit keine gültige Lösung darstellt.

$$x_1 = 2 \quad (\text{und} \quad x_2 = -1 \notin D_{f_2} = ]0; \infty[ )$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 2$  wird in  $\vec{A_n}$  eingesetzt.

$$\vec{A_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \log_{0,5} 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A_3(2| -1)$$