

Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt. Es gilt: $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$; $\overline{BD} = 12 \text{ cm}$; $\angle CAS = 60^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$.

[Ergebnis: $\overline{MS} = 8,66 \text{ cm}$]

Aufgabe B2.2 (1 Punkt)

Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide $ABCD S$ schneiden die Kanten der Pyramide $ABCD S$ in den Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$, $G_n \in [CS]$ und $H_n \in [DS]$, wobei die Winkel $E_n M A$ das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 90^\circ[$ haben. Die Rauten $E_n F_n G_n H_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_n F_n G_n H_n M$ mit der Spitze M .

Zeichnen Sie die Pyramide $E_1 F_1 G_1 H_1 M$ für $\varphi = 55^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten $[E_n M]$ der Pyramiden $E_n F_n G_n H_n M$ in Abhängigkeit von φ .

[Ergebnis: $\overline{E_n M}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}$]

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Diagonalen $[E_n G_n]$ der Rauten $E_n F_n G_n H_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{E_n G_n}(\varphi) = \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Aufgabe B2.5 (5 Punkte)

Die Punkte E_n, F_n, G_n, H_n, M und S sind die Eckpunkte von Körpern, die sich jeweils aus zwei Pyramiden zusammensetzen.

Begründen Sie, dass sich das Volumen V dieser Körper wie folgt berechnen lässt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rauten } E_n F_n G_n H_n} \cdot \overline{MS}.$$

Berechnen Sie sodann das Volumen V dieser Körper in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \right)^2 \text{ cm}^3]$$

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Für den Körper mit den Eckpunkten E_0, F_0, G_0, H_0, M und S gilt: $\overline{E_0 M}$.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens dieses Körpers am Volumen der Pyramide $ABCD S$.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCD S$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt. Es gilt: $\overline{AC} = 10$ cm ; $\overline{BD} = 12$ cm ; $\angle CAS = 60^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.

Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$.

[Ergebnis: $\overline{MS} = 8,66$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Es soll das Schrägbild der Pyramide $ABCD S$ gezeichnet werden.

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{BD} = 12 \text{ cm}$$

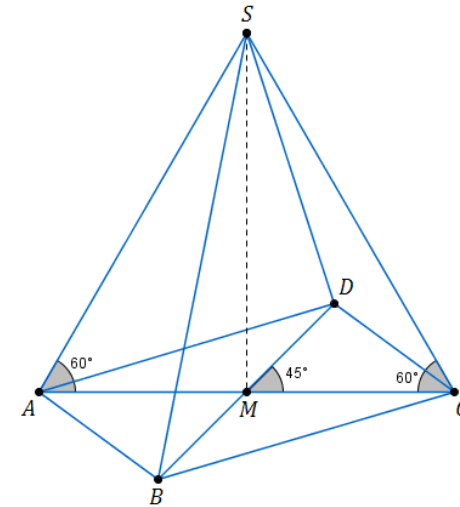
$$\angle CAS = 60^\circ$$

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonale im Schrägbild gilt somit:

$$\overline{BD} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ cm}$$

Winkel der Diagonale zur Schrägbildachse ist $\omega = 45^\circ$

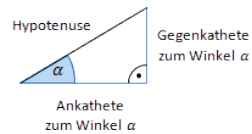


Seite eines Dreiecks bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck AMS . Da M Diagonalschnittpunkt ist, gilt:
 $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ cm.

Länge der Strecke $[MS]$ bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle CAS = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} \mid \cdot \overline{AM}$$

$$\overline{MS} = \overline{AM} \cdot \tan \angle CAS$$

$$\overline{MS} = 5 \cdot \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \overline{MS} \approx 8,66 \text{ cm}$$

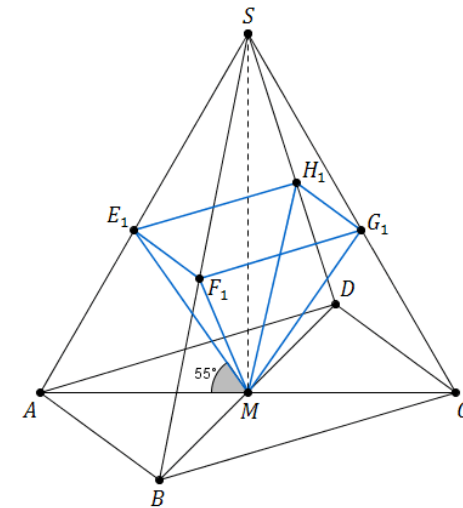
Aufgabe B2.2 (1 Punkte)

Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide $ABCD S$ schneiden die Kanten der Pyramide $ABCD S$ in den Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$, $G_n \in [CS]$ und $H_n \in [DS]$, wobei die Winkel $E_n M A$ das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 90^\circ[$ haben. Die Rauten $E_n F_n G_n H_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_n F_n G_n H_n M$ mit der Spitze M .

Zeichnen Sie die Pyramide $E_1 F_1 G_1 H_1 M$ für $\varphi = 55^\circ$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze



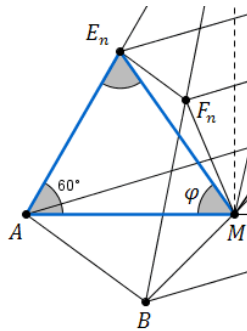
Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten $[E_n M]$ der Pyramiden $E_n F_n G_n H_n M$ in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } \overline{E_n M}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}]$$

Lösung zu Aufgabe B2.3

Seite eines Dreiecks bestimmen



Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\overline{AM} = 5 \text{ cm}$$

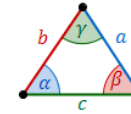
$$\angle MAE_n = 60^\circ$$

$$\angle E_n M A = \varphi$$

Betrachtet wird das Dreieck $AM E_n$.

Länge der Seite $[E_n M]$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck $AM E_n$ gilt somit:
$$\frac{\overline{E_n M}}{\sin \angle M A E_n} = \frac{\overline{AM}}{\sin \angle A E_n M}$$

$$\frac{\overline{E_n M}}{\sin \angle M A E_n} = \frac{\overline{AM}}{\sin \angle A E_n M}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180° .

Im Dreieck $AM E_n$ gilt somit: $\angle A E_n M + 60^\circ + \varphi = 180^\circ$.

Also hat der Winkel $\angle A E_n M$ eine Größe von $180^\circ - (60^\circ + \varphi)$.

$$\frac{\overline{E_n M}}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sin (180^\circ - (60^\circ + \varphi))} \cdot \sin 60^\circ$$

$$\overline{E_n M} = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{\sin (180^\circ - (60^\circ + \varphi))}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$, folgt:

$$\sin(180^\circ - \beta) = \underbrace{\sin 180^\circ}_0 \cdot \cos \beta - \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} \sin \beta = \sin \beta$$

$$\overline{E_n M} = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{\sin(60^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{E_n M} = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

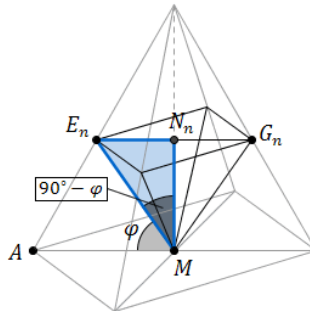
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Diagonalen $[E_n G_n]$ der Rauten

$E_n F_n G_n H_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$$\overline{E_n G_n}(\varphi) = \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe B2.4

Seite eines Dreiecks bestimmen



Sei N_n der Mittelpunkt der Strecke $[E_n G_n]$. Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $M M' E_n$.

Für die Länge der Strecke $[E_n G_n]$ gilt: $\overline{E_n G_n} = 2 \cdot \overline{E_n N_n}$

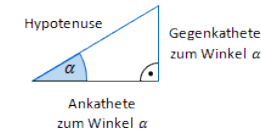
Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\overline{E_n M}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

φ ist das Maß des Winkels $\angle E_n M A$.

Länge der Seite $[E_n G_n]$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck $M M' E_n$ gilt somit: $\sin \angle M' M E_n = \frac{\overline{E_n M'}(\varphi)}{\overline{E_n M}(\varphi)}$

$$\sin \angle N_n M E_n = \frac{\overline{E_n N_n}(\varphi)}{\overline{E_n M}(\varphi)}$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \frac{\overline{E_n N_n}(\varphi)}{\overline{E_n M}(\varphi)}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$, folgt:

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \underbrace{\sin 90^\circ}_1 \cdot \cos \beta - \underbrace{\cos 90^\circ}_0 \sin \beta = \cos \beta$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{E_n N_n}(\varphi)}{\overline{E_n M}(\varphi)} \quad | \cdot \overline{E_n M}(\varphi)$$

$$\overline{E_n N_n}(\varphi) = \cos \varphi \cdot \overline{E_n M}(\varphi)$$

$$\overline{E_n N_n}(\varphi) = \cos \varphi \cdot \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{E_n G_n}(\varphi) = 2 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{E_n G_n}(\varphi) = \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

Aufgabe B2.5 (5 Punkte)

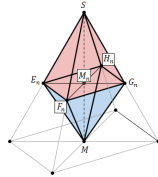
Die Punkte E_n, F_n, G_n, H_n, M und S sind die Eckpunkte von Körpern, die sich jeweils aus zwei Pyramiden zusammensetzen.

Begründen Sie, dass sich das Volumen V dieser Körper wie folgt berechnen lässt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rauten } E_n F_n G_n H_n} \cdot \overline{M S}.$$

Berechnen Sie sodann das Volumen V dieser Körper in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \right)^2 \text{ cm}^3]$$

Lösung zu Aufgabe B2.5**Volumen einer Pyramide**

Benötigte Angaben aus vorherigen Aufgaben:

$$\overline{AC} = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{BD} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{MS} = 8,66 \text{ cm}$$

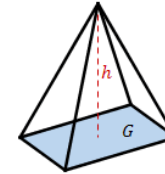
$$\overline{E_n G_n} = \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

Sei N_n der Diagonalschnittpunkt der Raute $E_n F_n G_n H_n$.

Das Volumen des Körpers setzt sich zusammen aus der Summe der Volumina der Pyramiden mit Grundfläche die Raute $E_n F_n G_n H_n$ und Höhe $[M N_n]$ bzw. $[N_n S]$.

$$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Pyramide mit Spitze } S} + V_{\text{Pyramide mit Spitze } M}$$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{Körper}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n F_n G_n H_n} \cdot \overline{N_n S} + \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n F_n G_n H_n} \cdot \overline{M N_n}$$

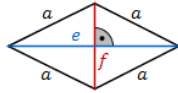
$$V_{\text{Körper}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n F_n G_n H_n} \cdot \underbrace{(\overline{N_n S} + \overline{M N_n})}_{\overline{MS}}$$

$$\Rightarrow V_{\text{Körper}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n F_n G_n H_n} \cdot \overline{MS}$$

Volumen des Körpers in Abhängigkeit von φ bestimmen:



Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

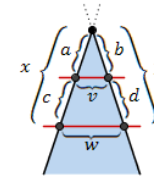
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$V_{\text{Körper}}(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{E_n G_n} \cdot \overline{F_n H_n} \cdot \overline{M S}$$

$$V_{\text{Körper}}(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \cdot \overline{F_n H_n} \cdot 8,66$$

$\overline{F_n H_n}$ durch zweimaliges Anwenden des Vierstreckensatzes bestimmen:

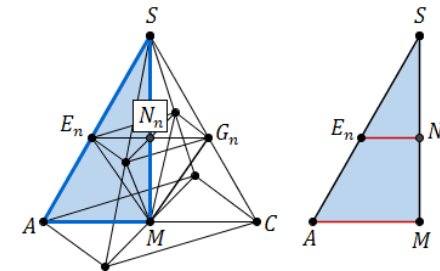
Erläuterung: *Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

Betrachtet man nun das Dreieck $A M S$, so gilt auch nach dem zweiten Streckensatz:



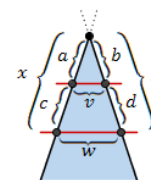
$$\frac{\overline{E_n N_n}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$$

Ersetzt man $\overline{E_n N_n}$ und \overline{AM} durch $\frac{1}{2} \cdot \overline{E_n G_n}$ und $\frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$, so lautet obige Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{E_n G_n}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}} \iff \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$$

Vierstreckensatz im Strahl aus S durch A und M : $\frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$

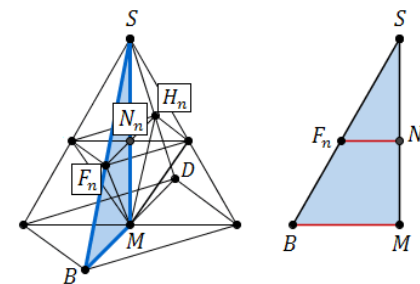
Erläuterung: Vierstreckensatz



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

Betrachtet man nun das Dreieck AMS , so gilt auch nach dem zweiten Streckensatz:



$$\frac{\overline{F_n N_n}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$$

Ersetzt man $\overline{F_n N_n}$ und \overline{BM} durch $\frac{1}{2} \cdot \overline{F_n H_n}$ und $\frac{1}{2} \cdot \overline{BD}$, so lautet obige Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{F_n H_n}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}} \iff \frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$$

Vierstreckensatz im Strahl aus S durch B und M : $\frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}}$

Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}} \\ \frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}}$$

$$\frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}} \mid \cdot \overline{B D}$$

$$\overline{F_n H_n} = \overline{E_n G_n} \cdot \frac{\overline{B D}}{\overline{A C}}$$

$$\overline{F_n H_n} = \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \cdot \frac{12}{10} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{F_n H_n} = \frac{10,39 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)}$$

Einsetzen von $\overline{F_n H_n}$ in $V_{\text{Körper}}(\varphi)$:

$$V_{\text{Körper}}(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8,66 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \cdot \frac{10,39 \cdot \cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \cdot 8,66 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Körper}}(\varphi) \approx 129,87 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \right)^2 \text{ cm}^3$$

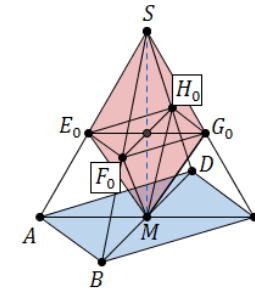
Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Für den Körper mit den Eckpunkten E_0, F_0, G_0, H_0, M und S gilt: $\overline{E_0 M}$.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens dieses Körpers am Volumen der Pyramide $ABCD S$.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Volumen einer Pyramide



Benötigte Angaben aus vorherigen Aufgaben:

$$\overline{A C} = 10 \text{ cm}$$

$$\overline{A D} = 12 \text{ cm}$$

$$\overline{M S} = 8,66 \text{ cm}$$

$$\overline{E_n M}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)} \text{ cm}$$

$$V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos \varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)} \right)^2 \text{ cm}^3$$

Winkel φ bestimmen:

$$\overline{E_0 M} = 4,33 \text{ cm}$$

$$4,33 = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)} \Rightarrow \sin(60^\circ + \varphi) = 1$$

$$\sin(60^\circ + \varphi) = 1 \iff \sin(60^\circ + \varphi) = \underbrace{\sin(90^\circ)}_1$$

$$60^\circ + \varphi = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Volumen des Körpers $E_0 F_0 G_0 H_0 M S$ bestimmen:

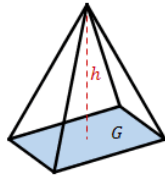
$$V_{\text{Körper}} = V(\varphi = 30^\circ)$$

$$V_{\text{Körper}} = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos 30^\circ}{\sin(60^\circ + 30^\circ)} \right)^2 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Körper}} \approx 97,40 \text{ cm}^3$$

Volumen der Pyramide $ABCD S$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*

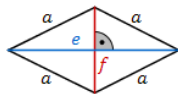


Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{Pyramide } ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } ABCD} \cdot \overline{MS}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$V_{\text{Pyramide } ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{MS}$$

$$V_{\text{Pyramide } ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot 8,66 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow V_{\text{Pyramide } ABCDS} = 173,2 \text{ cm}^3$$

Prozentrechnung

Prozentualen Anteil des Volumens des Körpers $E_0 F_0 G_0 H_0 M S$ am Volumen der Pyramide $ABCD S$ bestimmen:

$$\frac{V_{\text{Körper}}}{V_{\text{Pyramide } ABCDS}} = \frac{97,40}{173,2} \cdot 100\% \approx 56\%$$