Mittlere-Reife-Prüfung 2010 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt. Es gilt: $\overline{AC} = 10$ cm ; $\overline{BD} = 12$ cm ; $\measuredangle CAS = 60°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$.
[Ergebnis: $\overline{MS} = 8,66$ cm]

Aufgabe B2.2 (1 Punkt)

Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide $ABCDS$ schneiden die Kanten der Pyramide $ABCDS$ in den Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$, $G_n \in [CS]$ und $H_n \in [DS]$, wobei die Winkel E_nMA das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 90°[$ haben. Die Rauten $E_nF_nG_nH_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ mit der Spitze M.
Zeichnen Sie die Pyramide $E_1F_1G_1H_1M$ für $\varphi = 55°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten $[E_nM]$ der Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $\overline{E_nM}(\varphi)\frac{4,33}{\sin(60° + \varphi)}$]

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Diagonalen $[E_nG_n]$ der Rauten $E_nF_nG_nH_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{E_nG_n}(\varphi) = \frac{8,66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}$ cm.

Aufgabe B2.5 (5 Punkte)

Die Punkte E_n, F_n, G_n, H_n, M und S sind die Eckpunkte von Körpern, die sich jeweils aus zwei Pyramiden zusammensetzen.
Begründen Sie, dass sich das Volumen V dieser Körper wie folgt berechnen lässt:
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rauten } E_nF_nG_nH_n} \cdot \overline{MS}$.
Berechnen Sie sodann das Volumen V dieser Körper in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}\right)^2$ cm^3]

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Für den Körper mit den Eckpunkten E_0, F_0, G_0, H_0, M und S gilt: $\overline{E_0M}$.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens dieses Körpers am Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCDS$, deren Spitze S senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M der Raute $ABCD$ liegt. Es gilt: $\overline{AC} = 10$ cm ; $\overline{BD} = 12$ cm ; $\measuredangle CAS = 60°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[MS]$.
[Ergebnis: $\overline{MS} = 8,66$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Es soll das Schrägbild der Pyramide $ABCDS$ gezeichnet werden.

$\overline{AC} = 10$ cm

$\overline{BD} = 12$ cm

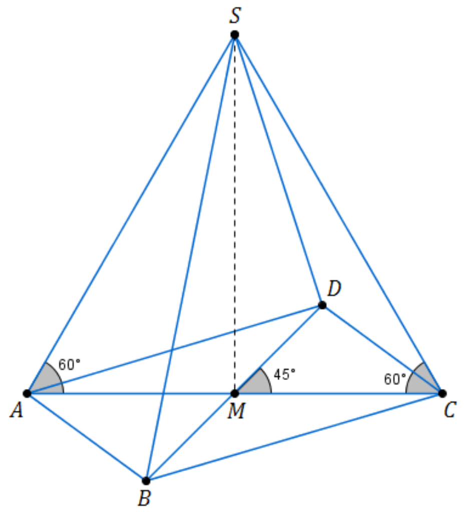
$\measuredangle CAS = 60°$

$q = \frac{1}{2}$ ist der Faktor für die Diagonale im Schrägbild.

Für die Länge der Diagonale im Schrägbild gilt somit:

$\overline{BD} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ cm

Winkel der Diagonale zur Schrägbildachse ist $\omega = 45°$

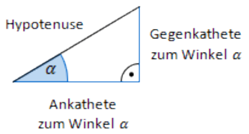


Seite eines Dreiecks bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck AMS. Da M Diagonalschnittpunkt ist, gilt: $\overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ cm.

Länge der Strecke $[MS]$ bestimmen:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\measuredangle CAS = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} \;|\cdot \overline{AM}$

$\overline{MS} = \overline{AM} \cdot \tan\measuredangle CAS$

$\overline{MS} = 5 \cdot \tan 60°$

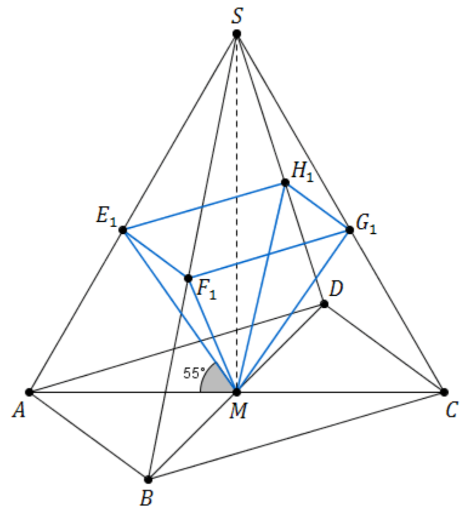
$\Rightarrow \overline{MS} \approx 8,66$ cm

Aufgabe B2.2 (1 Punkte)

Parallele Ebenen zur Grundfläche der Pyramide $ABCDS$ schneiden die Kanten der Pyramide $ABCDS$ in den Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$, $G_n \in [CS]$ und $H_n \in [DS]$, wobei die Winkel E_nMA das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 90°[$ haben. Die Rauten $E_nF_nG_nH_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ mit der Spitze M.
Zeichnen Sie die Pyramide $E_1F_1G_1H_1M$ für $\varphi = 55°$ in das Schrägbild zu 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

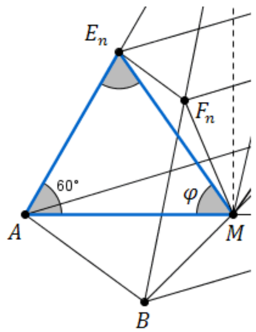


Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seitenkanten $[E_nM]$ der Pyramiden $E_nF_nG_nH_nM$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $\overline{E_nM}(\varphi)\frac{4,33}{\sin(60° + \varphi)}$]

Lösung zu Aufgabe B2.3

Seite eines Dreiecks bestimmen



Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$\overline{AM} = 5$ cm

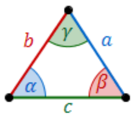
$\measuredangle MAE_n = 60°$

$\measuredangle E_nMA = \varphi$

Betrachtet wird das Dreieck AME_n.

Länge der Seite $[E_nM]$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck AME_n gilt somit: $\dfrac{\overline{E_nM}}{\sin\measuredangle MAE_n} = \dfrac{\overline{AM}}{\sin\measuredangle AE_nM}$

$$\frac{\overline{E_nM}}{\sin\measuredangle MAE_n} = \frac{\overline{AM}}{\sin\measuredangle AE_nM}$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Im Dreieck AME_n gilt somit: $\measuredangle AE_nM + 60° + \varphi = 180°$.

Also hat der Winkel $\measuredangle AE_nM$ eine Größe von $180° - (60° + \varphi)$.

$$\frac{\overline{E_nM}}{\sin 60°} = \frac{5}{\sin\,(180° - (60° + \varphi))} \quad | \cdot \sin 60°$$

$$\overline{E_nM} = \frac{5 \cdot \sin 60°}{\sin\,(180° - (60° + \varphi))}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, folgt:

$$\sin(180° - \beta) = \underbrace{\sin 180°}_{0} \cdot \cos\beta - \underbrace{\cos 180°}_{-1} \sin\beta = \sin\beta$$

$$\overline{E_n\,M} = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{\sin\,(60^\circ + \varphi)}$$

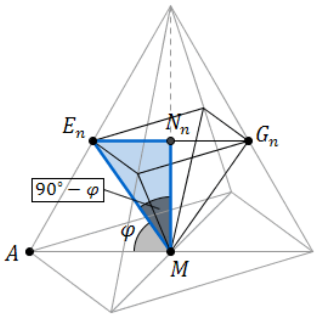
$$\Rightarrow \overline{E_n\,M} = \frac{4,33}{\sin\,(60^\circ + \varphi)}\ \text{cm}$$

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Diagonalen $[E_n\,G_n]$ der Rauten $E_n\,F_n\,G_n\,H_n$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{E_n\,G_n}(\varphi) = \dfrac{8,66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60^\circ + \varphi)}$ cm.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Seite eines Dreiecks bestimmen



Sei N_n der Mittelpunkt der Strecke $[E_n\,G_n]$. Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $M\,M'\,E_n$.

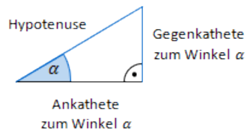
Für die Länge der Strecke $[E_n\,G_n]$ gilt: $\overline{E_n\,G_n} = 2 \cdot \overline{E_n\,N_n}$

Benötigte Angaben aus den vorherigen Aufgaben:

$$\overline{E_n\,M}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}\ \text{cm}$$

φ ist das Maß des Winkels $\measuredangle E_n\,M\,A$.
Länge der Seite $[E_n\,G_n]$ bestimmen:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck $M\,M'\,E_n$ gilt somit: $\sin\measuredangle M'\,M\,E_n = \dfrac{\overline{E_n\,M'}(\varphi)}{\overline{E_n\,M}(\varphi)}$

$$\sin\measuredangle N_n\,M\,E_n = \frac{\overline{E_n\,N_n}(\varphi)}{\overline{E_n\,M}(\varphi)}$$

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \frac{\overline{E_n\,N_n}(\varphi)}{\overline{E_n\,M}(\varphi)}$$

Erläuterung: *Additionstheorem*

Aus dem Additionstheorem $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$, folgt:

$$\sin(90^\circ - \beta) = \underbrace{\sin 90^\circ}_{1} \cdot \cos\beta - \underbrace{\cos 90^\circ}_{0}\sin\beta = \cos\beta$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{E_n\,N_n}(\varphi)}{\overline{E_n\,M}(\varphi)} \quad | \cdot \overline{E_n\,M}(\varphi)$$

$$\overline{E_n\,N_n}(\varphi) = \cos\varphi \cdot \overline{E_n\,M}(\varphi)$$

$$\overline{E_n\,N_n}(\varphi) = \cos\varphi \cdot \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \overline{E_n\,G_n}(\varphi) = 2 \cdot \cos\varphi \cdot \frac{4,33}{\sin(60^\circ + \varphi)}$$

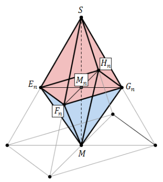
$\Rightarrow \overline{E_n\,G_n}(\varphi) = \dfrac{8{,}66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}$ cm

Aufgabe B2.5 (5 Punkte)

Die Punkte E_n, F_n, G_n, H_n, M und S sind die Eckpunkte von Körpern, die sich jeweils aus zwei Pyramiden zusammensetzen.
Begründen Sie, dass sich das Volumen V dieser Körper wie folgt berechnen lässt:
$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rauten } E_n\,F_n\,G_n\,H_n} \cdot \overline{M\,S}$.
Berechnen Sie sodann das Volumen V dieser Körper in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = 129{,}87 \cdot \left(\dfrac{\cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}\right)^2$ cm^3]

Lösung zu Aufgabe B2.5

Volumen einer Pyramide



Benötigte Angaben aus vorherigen Aufgaben:

$\overline{A\,C} = 10$ cm

$\overline{B\,D} = 12$ cm

$\overline{M\,S} = 8{,}66$ cm

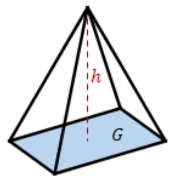
$\overline{E_n\,G_n} = \dfrac{8{,}66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}$ cm

Sei N_n der Diagonalschnittpunkt der Raute $E_n\,F_n\,G_n\,H_n$.

Das Volumen des Körpers setzt sich zusammen aus der Summe der Volumina der Pyramiden mit Grundfläche die Raute $E_n\,F_n\,G_n\,H_n$ und Höhe $[M\,N_n]$ bzw. $[N_n\,S]$.

$V_{\text{Körper}} = V_{\text{Pyramide mit Spitze } S} + V_{\text{Pyramide mit Spitze } M}$

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

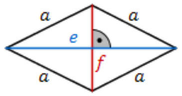
$V_{\text{Körper}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n\,F_n\,G_n\,H_n} \cdot \overline{N_n\,S} + \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n\,F_n\,G_n\,H_n} \cdot \overline{M\,N_n}$

$V_{\text{Körper}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n\,F_n\,G_n\,H_n} \cdot \underbrace{(\overline{N_n\,S} + \overline{M\,N_n})}_{\overline{M\,S}}$

$\Rightarrow V_{\text{Körper}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } E_n\,F_n\,G_n\,H_n} \cdot \overline{M\,S}$

Volumen des Körpers in Abhängigkeit von φ bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

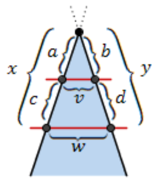
$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$V_{\text{Körper}}(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{E_n G_n} \cdot \overline{F_n H_n} \cdot \overline{M S}$$

$$V_{\text{Körper}}(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8,66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} \cdot \overline{F_n H_n} \cdot 8,66$$

$\overline{F_n H_n}$ durch zweimaliges Anwenden des Vierstreckensatzes bestimmen:

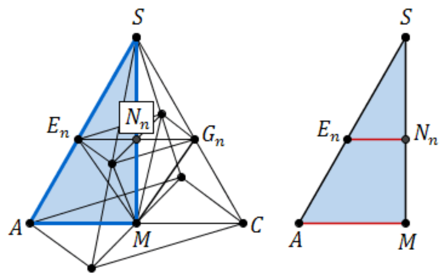
Erläuterung: *Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

Betrachtet man nun das Dreieck AMS, so gilt auch nach dem zweiten Streckensatz:



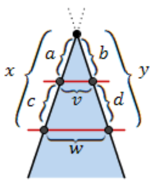
$$\frac{\overline{E_n N_n}}{\overline{A M}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}}$$

Ersetzt man $\overline{E_n N_n}$ und $\overline{A M}$ durch $\frac{1}{2} \cdot \overline{E_n G_n}$ und $\frac{1}{2} \cdot \overline{A C}$, so lautet obige Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{E_n G_n}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{A C}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}} \iff \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}}$$

Vierstreckensatz im Strahl aus S durch A und M: $\dfrac{\overline{E_n G_n}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$

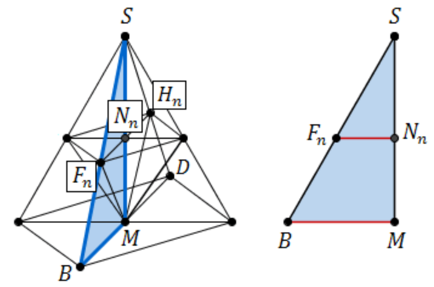
Erläuterung: *Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$ und $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$
2. $\dfrac{v}{w} = \dfrac{a}{x}$ bzw. $\dfrac{v}{w} = \dfrac{b}{y}$

Betrachtet man nun das Dreieck AMS, so gilt auch nach dem zweiten Streckensatz:



$$\frac{\overline{F_n N_n}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$$

Ersetzt man $\overline{F_n N_n}$ und $\overline{BM}$ durch $\frac{1}{2} \cdot \overline{F_n H_n}$ und $\frac{1}{2} \cdot \overline{BD}$, so lautet obige Gleichung:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{F_n H_n}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}} \iff \frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{MS}}$$

Vierstreckensatz im Strahl aus S durch B und M: $\dfrac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \dfrac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}}$

Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}} \\ \frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{N_n S}}{\overline{M S}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}}$$

$$\frac{\overline{F_n H_n}}{\overline{B D}} = \frac{\overline{E_n G_n}}{\overline{A C}} \quad | \cdot \overline{B D}$$

$$\overline{F_n H_n} = \overline{E_n G_n} \cdot \frac{\overline{B D}}{\overline{A C}}$$

$$\overline{F_n H_n} = \frac{8,66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} \cdot \frac{12}{10} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \overline{F_n H_n} = \frac{10,39 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)}$$

Einsetzen von $\overline{F_n H_n}$ in $V_{\text{Körper}}(\varphi)$:

$$V_{\text{Körper}}(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8,66 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} \cdot \frac{10,39 \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} \cdot 8,66 \text{ cm}^3$$

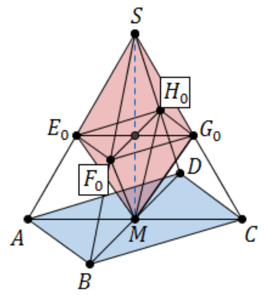
$$\Rightarrow V_{\text{Körper}}(\varphi) \approx 129,87 \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} \right) \text{ cm}^3$$

Aufgabe B2.6 (3 Punkte)

Für den Körper mit den Eckpunkten E_0, F_0, G_0, H_0, M und S gilt: $\overline{E_0 M}$. Berechnen Sie den prozentualen Anteil des Volumens dieses Körpers am Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Volumen einer Pyramide



Benötigte Angaben aus vorherigen Aufgaben:

$\overline{A C} = 10$ cm

$\overline{A D} = 12$ cm

$\overline{M S} = 8,66$ cm

$$\overline{E_n M}(\varphi) = \frac{4,33}{\sin(60° + \varphi)} \text{ cm}$$

$$V(\varphi) = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} \right)^2 \text{ cm}^3$$

Winkel φ bestimmen:

$\overline{E_0 M} = 4,33$ cm

$$4,33 = \frac{4,33}{\sin(60° + \varphi)} \Rightarrow \sin(60° + \varphi) = 1$$

$$\sin(60° + \varphi) = 1 \iff \sin(60° + \varphi) = \underbrace{\sin(90°)}_{1}$$

$$60° + \varphi = 90°$$

$$\Rightarrow \varphi = 30°$$

Volumen des Körpers $E_0 F_0 G_0 H_0 M S$ bestimmen:

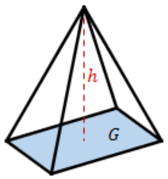
$$V_{\text{Körper}} = V(\varphi = 30°)$$

$V_{\text{Körper}} = 129,87 \cdot \left(\frac{\cos 30°}{\sin(60° + 30°)}\right)^2 \text{ cm}^3$

$\Rightarrow V_{\text{Körper}} \approx 97,40 \text{ cm}^3$

Volumen der Pyramide $ABCDS$ bestimmen:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*

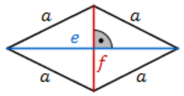


Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$V_{\text{Pyramide } ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Raute } ABCD} \cdot \overline{MS}$

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

$V_{\text{Pyramide } ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{MS}$

$V_{\text{Pyramide } ABCDS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot 8,66 \text{ cm}^3$

$\Rightarrow V_{\text{Pyramide } ABCDS} = 173,2 \text{ cm}^3$

Prozentrechnung

Prozentualen Anteil des Volumens des Körpers $E_0 F_0 G_0 H_0 MS$ am Volumen der Pyramide $ABCDS$ bestimmen:

$\frac{V_{\text{Körper}}}{V_{\text{Pyramide } ABCDS}} = \frac{97,40}{173,2} \cdot 100\% \approx 56\%$