

Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik II Aufgabe A2

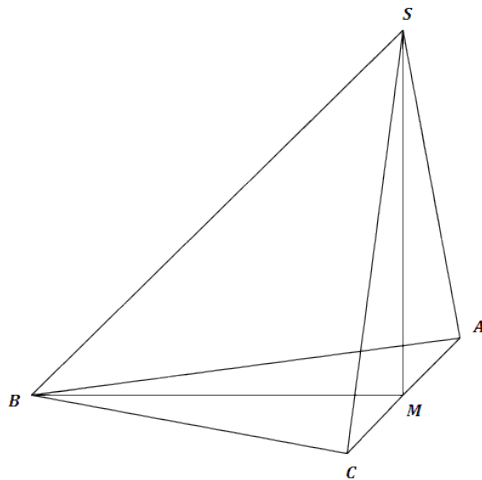
Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AC]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCS$. Die Spitze S der Pyramide $ABCS$ liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$.

Es gilt: $\overline{AC} = 8$ cm; $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{MS} = 9$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.



Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung die Länge der Strecken $[BM]$ und $[BS]$ sowie das Maß φ des Winkels $MB S$.

[Ergebnisse: $\overline{BM} = 9,17$ cm; $\overline{BS} = 12,85$ cm; $\varphi = 44,46^\circ$]

Aufgabe A2.2 (4 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[BS]$ mit $\overline{BP_n} = x$ cm, $0 < x < 12,85$; $x \in \mathbb{R}$. Sie sind die Spitzen von Pyramiden $CASP_n$.

Zeichnen Sie für $x = 4$ die Pyramide $CASP_1$ und die zugehörige Höhe $[P_1F_1]$, deren Fußpunkt F_1 auf der Strecke $[MS]$ liegt, in das Schrägbild zu 2.0 ein.

Berechnen Sie sodann das Volumen der Pyramide $CASP_1$.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von x gilt:

$$\overline{MP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 13,09x + 84,09} \text{ cm.}$$

Lösung

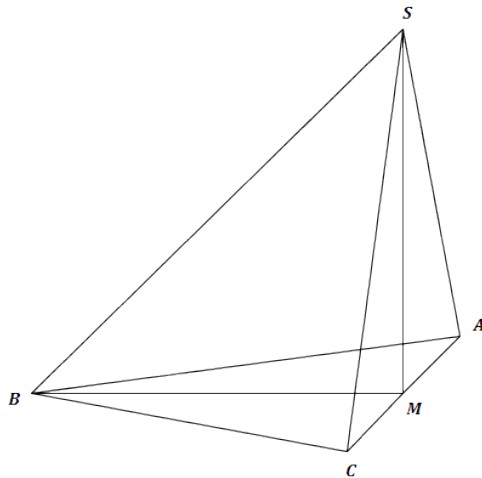
Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[AC]$ ist die Grundfläche einer Pyramide $ABCS$. Die Spitze S der Pyramide $ABCS$ liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Strecke $[AC]$.

Es gilt: $\overline{AC} = 8$ cm; $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{MS} = 9$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$.



Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Ermitteln Sie durch Rechnung die Länge der Strecken $[BM]$ und $[BS]$ sowie das Maß φ des Winkels $MB S$.

[Ergebnisse: $\overline{BM} = 9,17$ cm; $\overline{BS} = 12,85$ cm; $\varphi = 44,46^\circ$]

Lösung zu Aufgabe A2.1

Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{AC} = 8$ cm; $\overline{AB} = 10$ cm; $\overline{MS} = 9$ cm

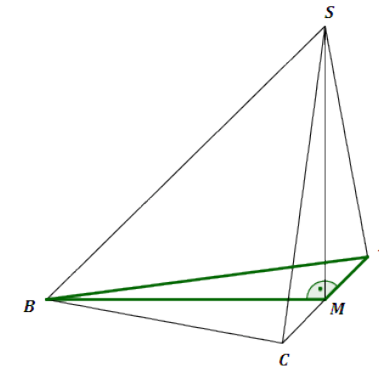
Gesucht: \overline{BM}

Man betrachtet das Dreieck ABM .

Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

Da das Dreieck ABC mit der Basis $[AC]$ gleichschenklig ist, ist die Seitenhalbierende $[BM]$ zugleich Höhe.

Deshalb ist das Dreieck ABM bei M rechtwinklig.



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Im Dreieck ABM :

$$a = \overline{BM}, \quad b = \overline{AM}, \quad c = \overline{AB}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 \quad | \quad \overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$$

$$\overline{BM}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 8\right)^2 = 10^2$$

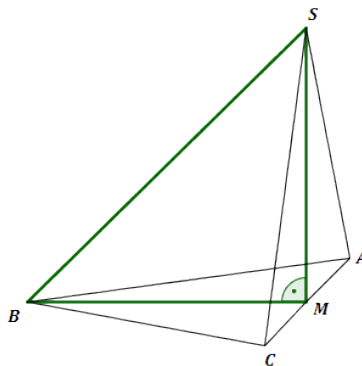
$$\overline{BM}^2 + 16 = 100 \quad | \quad -16$$

$$\overline{BM}^2 = 84 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow \overline{BM} = 9,17 \text{ cm}$$

Gesucht: \overline{BS}

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck BMS .



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

Im Dreieck ABM :

$$a = \overline{BM}, \quad b = \overline{MS}, \quad c = \overline{BS}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\overline{BM}^2 + \overline{MS}^2 = \overline{BS}^2$$

$$9,17^2 + 9^2 = \overline{BS}^2 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{BS} = \sqrt{9,17^2 + 9^2}$$

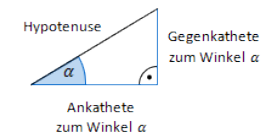
$$\Rightarrow \overline{BS} = 12,85 \text{ cm}$$

Winkel bestimmen

Gesucht: $\varphi = \angle MBS$

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck BMS (siehe obige Skizze).

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \varphi = \frac{\overline{MS}}{\overline{BM}}$$

$$\tan \varphi = \frac{9}{9,17} \quad | \quad \tan^{-1}$$

$$\Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{9}{9,17} \right) \approx 44,46^\circ$$

Aufgabe A2.2 (4 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[BS]$ mit $\overline{BP_n} = x \text{ cm}$, $0 < x < 12,85$; $x \in \mathbb{R}$. Sie sind die Spitzen von Pyramiden $CASP_n$.

Zeichnen Sie für $x = 4$ die Pyramide $CAS P_1$ und die zugehörige Höhe $[P_1 F_1]$, deren Fußpunkt F_1 auf der Strecke $[MS]$ liegt, in das Schrägbild zu 2.0 ein.
Berechnen Sie sodann das Volumen der Pyramide $CAS P_1$.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Skizze

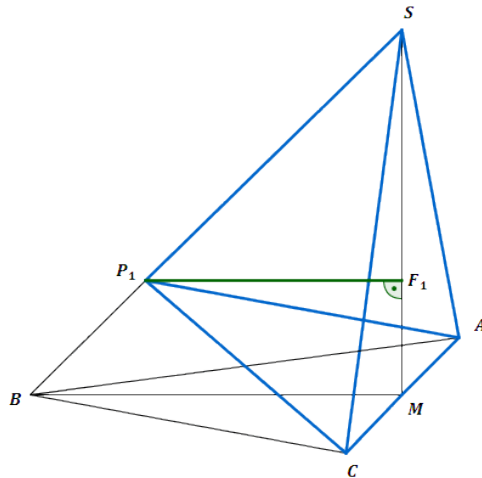
Pyramide $CAS P_1$ und Höhe $[P_1 F_1]$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Punkt P_1 im Abstand von 4 cm vom Punkt B auf der Strecke $[BS]$ eingezeichnet.

Anschließend werden die Punkte zur Pyramide $CAS P_1$ verbunden.

Zum Schluss wird noch die Höhe eingezeichnet (siehe Beschreibung in der Angabe).



Volumen einer Pyramide

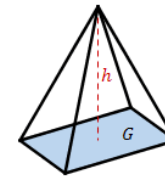
Gegeben:

$$\overline{AC} = 8 \text{ cm}, \quad \overline{MS} = 9 \text{ cm}, \quad \overline{BM} = 9,17 \text{ cm}, \quad \overline{BS} = 12,85 \text{ cm}, \quad \overline{BP_1} = 4 \text{ cm}$$

Gesucht:

Volumen V der Pyramide $CAS P_1$

Erläuterung:



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche G ist das gleichschenklige Dreieck CAS .

Die Höhe h ist die Strecke $[P_1 F_1]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

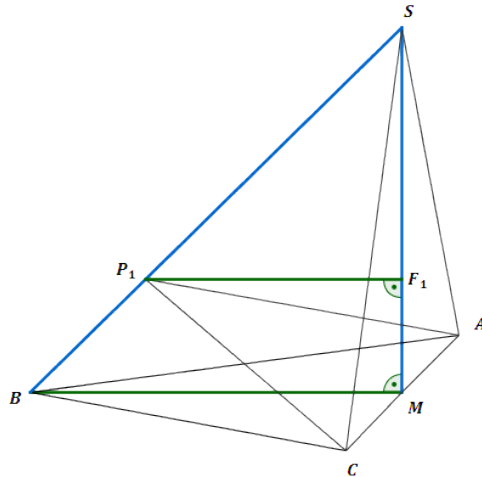
Im Dreieck CAS :

$$a = [AC], \quad h_a = [MS]$$

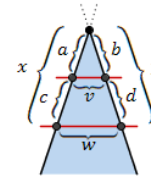
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{P_1 F_1}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9 \cdot \overline{P_1 F_1} = 12 \cdot \overline{P_1 F_1}$$

Zur Berechnung von $\overline{P_1 F_1}$ wird das Dreieck BMS betrachtet.



Erläuterung: *Strahlensatz, Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ und $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. $\frac{v}{w} = \frac{a}{x}$ bzw. $\frac{v}{w} = \frac{b}{y}$

$$\frac{\overline{P_1 F_1}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{P_1 S}}{\overline{BS}}$$

$$\frac{\overline{P_1 F_1}}{9,17} = \frac{\overline{BS} - \overline{BP_1}}{12,85}$$

$$\frac{\overline{P_1 F_1}}{9,17} = \frac{12,85 - 4}{12,85} \quad | \cdot 9,17$$

$$\overline{P_1 F_1} = 6,32 \text{ cm}$$

$$V = 12 \cdot \overline{P_1 F_1} = 12 \cdot 6,32$$

$$\Rightarrow V = 75,84 \text{ cm}^3$$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[MP_n]$ in Abhängigkeit von x gilt:

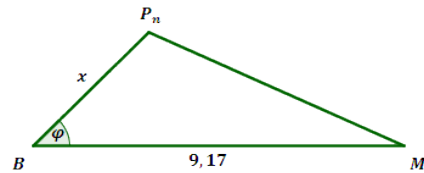
$$\overline{MP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 13,09x + 84,09} \text{ cm.}$$

Lösung zu Aufgabe A2.3

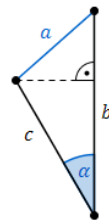
Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{BP_n} = x$ cm, $\overline{BM} = 9,17$ cm, $\varphi = 44,46^\circ$

Man betrachtet das Dreieck $BM P_n$:



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Im Dreieck $BM P_n$:

$$a = [M P_n], \quad b = [BM], \quad c = x \quad \alpha = \varphi$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{MP_n}^2 = \overline{BM}^2 + x^2 - 2 \cdot \overline{BM} \cdot x \cdot \cos \varphi \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{MP_n} = \sqrt{9,17^2 + x^2 - 2 \cdot 9,17 \cdot x \cdot \cos 44,46^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{MP_n}(x) = \sqrt{x^2 - 13,09x + 84,09} \text{ cm}$$