Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(5|-1)$ und $Q(-2|0,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a\,x^2 + b\,x + 2,75$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und b, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$ hat.
Zeichnen Sie die Parabel p sowie die Gerade g für $x \in [-4; 7]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 8$; $-7 \leqq y \leqq 8$.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x|-0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n(x|-0,5x+5)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x. Sie sind zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ mit $\overline{B_n\,D_n} = 5\,\text{LE}$.
Zeichnen Sie für $x = -1$ die Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und für $x = 3,5$ die Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Diagonalen $[A_n\,C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$\overline{A_n\,C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25)$ LE.

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Diagonalen $[A_n\,C_n]$ hat die Diagonale $[A_0\,C_0]$ die minimale Länge.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x und die Länge der Diagonale $[A_0\,C_0]$.
Begründen Sie sodann, dass es unter den Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ keine Raute mit dem Flächeninhalt 3 FE gibt.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Rauten $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ und $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ sind Quadrate.
Ermitteln Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte A_3 und A_4. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Die Diagonalen der Rauten $A_5\,B_5\,C_5\,D_5$ und $A_6\,B_6\,C_6\,D_6$ schneiden sich jeweils auf der x-Achse.
Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte A_5 und A_6. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(5|-1)$ und $Q(-2|0,75)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a\,x^2 + b\,x + 2,75$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,5x + 5$ mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und b, dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$ hat.
Zeichnen Sie die Parabel p sowie die Gerade g für $x \in [-4; 7]$ in ein Koordinatensystem.
Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leqq x \leqq 8$; $-7 \leqq y \leqq 8$.

Lösung zu Aufgabe B1.1

Funktionsgleichung ermitteln

Gegeben:

$P(5|-1)$, $Q(-2|0,75)$ $p: y = a\,x^2 + b\,x + 2,75$

Erläuterung: *Gleichungssystem aufstellen*

Die Punkte $P(5|-1)$ und $Q(-2|0,75)$ werden in die Parabelgleichung $p: y = a\,x^2 + b\,x + 2,75$ eingesetzt.

Man erhält ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten a und b.

(I) $-1 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2,75$

(II) $0,75 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 2,75$

(I) $-1 = 25a + 5b + 2,75 \quad | \quad \cdot 2$

(II) $0,75 = 4a - 2b + 2,75 \quad | \quad \cdot 5$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Die erste Gleichung wird mit 2 und die zweite Gleichung wird mit 5 multipliziert.

Somit kommt in der ersten Gleichung der Term $10b$ und in der zweiten Gleichung der Term $-10b$ vor.

Danach werden die beiden Gleichungen addiert, wodurch die Variable b verschwindet.

(I) $-2 = 50a + 10b + 5,5$

(II) $3,75 = 20a - 10b + 13,75$

(I)+(II) $1,75 = 70a + 19,25 \quad | \quad -19,25$

(I)+(II) $-17,5 = 70a \quad | \quad :70$

$\Rightarrow \quad a = -0,25$

Erläuterung:

$a = -0,25$ wird in (I) $-1 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2,75$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach b aufgelöst.

(I) $-1 = -0,25 \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 2,75$

(I) $-1 = 5b - 3,5 \quad | \quad +3,5$

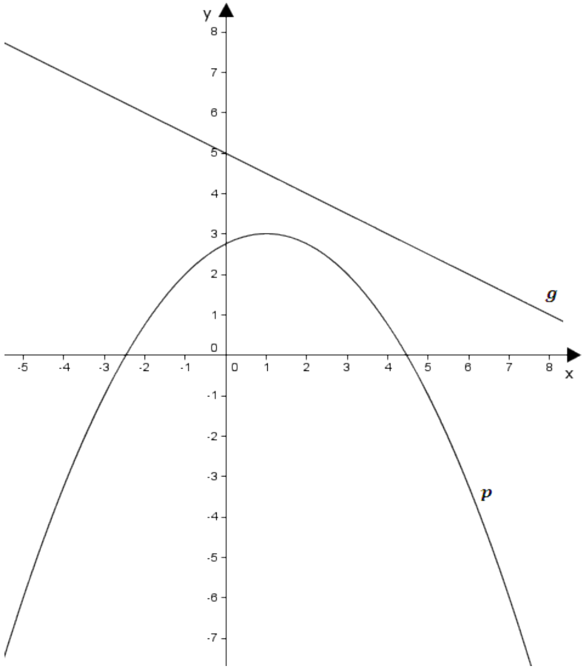
(I) $2,5 = 5b \quad | \quad :5$

$\Rightarrow \quad b = 0,5$

$\Rightarrow \quad p: y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$

Skizze

$p: y = -0,25x^2 + 0,5x + 2,75$ und $g: y = -0,5x + 5$ einzeichnen:



Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n(x| -0,25x^2+0,5x+2,75)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n(x| -0,5x+5)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x. Sie sind zusammen mit Punkten B_n und D_n die Eckpunkte von Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ mit $\overline{B_n\,D_n}=5\,\text{LE}$.
Zeichnen Sie für $x=-1$ die Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und für $x=3,5$ die Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ in das Koordinatensystem zu 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

$A_1(-1| -0,25\cdot(-1)^2+0,5\cdot(-1)+2,75)=A_1(-1|2)$ auf der Parabel p einzeichnen.

$C_1(-1| -0,5\cdot(-1)+5)=C_1(-1|5,5)$ auf der Geraden g einzeichnen.

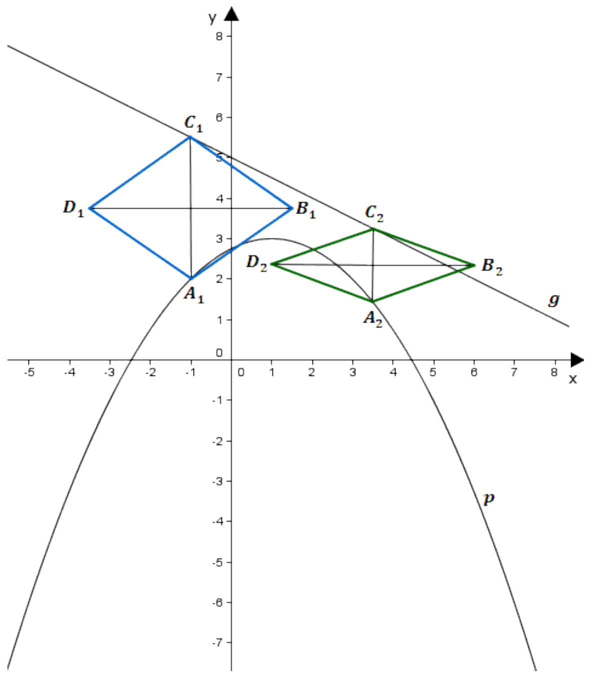
Die Diagonale $[A_1\,C_1]$ wird eingezeichnet.

In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren sich jeweils.

Durch den Mittelpunkt M_1 der Diagonalen $[A_1\,C_1]$ wird die Diagonale $[B_1\,D_1]$ als Lot mit 5 LE gezeichnet, wobei gilt: $\overline{D_1\,M_1}=\overline{M_1\,B_1}=2,5$ LE

Die Eckpunkte werden zur Raute $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ verbunden.

Raute $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$ analog.



Aufgabe B1.3 (1 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Diagonalen $[A_n\,C_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt:
$\overline{A_n\,C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25)$ LE.

Lösung zu Aufgabe B1.3

Länge einer Strecke

Gegeben:

$A_n(x|-0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$ liegen auf der Parabel p

$C_n(x|-0,5x + 5)$ liegen auf der Geraden g

Gesucht:

$\overline{A_n\,C_n}$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte A_n und die Punkte C_n die gleiche Abszisse (x-Wert) haben, liegen die Punkte C_n genau senkrecht oberhalb den Punkten A_n.

$\Rightarrow \quad \overline{A_n\,C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n\,C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$

$\overline{A_n\,C_n} = -0,5x + 5 - (-0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$

$\overline{A_n\,C_n} = -0,5x + 5 + 0,25x^2 - 0,5x - 2,75$

$\Rightarrow \quad \overline{A_n\,C_n} = 0,25x^2 - x + 2,25$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Unter den Diagonalen $[A_n\,C_n]$ hat die Diagonale $[A_0\,C_0]$ die minimale Länge.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert von x und die Länge der Diagonale $[A_0\,C_0]$.
Begründen Sie sodann, dass es unter den Rauten $A_n\,B_n\,C_n\,D_n$ keine Raute mit dem Flächeninhalt 3 FE gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Extremwertproblem

Gegeben aus 1.3: $\overline{A_n\,C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25)$ LE

Gesucht ist das Minimum von $\overline{A_n\,C_n}$.

Das Minimum der nach oben geöffneten Parabel $\overline{A_n\,C_n}(x) = 0,25x^2 - x + 2,25$ liegt beim Scheitelpunkt S.

Erläuterung: *Scheitelpunkt einer Parabel bestimmen*

Eine quadratische Funktion der Form $y = a\,x^2 + b\,x + c$ besitzt folgenden Scheitelpunkt S:

$S\left(-\dfrac{b}{2a} \middle| \dfrac{4a\,c - b^2}{4a}\right)$ (siehe Formelsammlung)

Es genügt, den x-Wert des Scheitelpunktes S zu bestimmen.

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

$$x_S = -\frac{-1}{2 \cdot 0,25} = 2$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_S = 2$ wird in $\overline{A_n\,C_n}(x) = 0,25x^2 - x + 2,25$ eingesetzt.

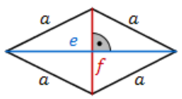
$$\overline{A_0\,C_0} = 0,25 \cdot 2^2 - 2 + 2,25$$

$\Rightarrow$ Für $x = 2$ gilt: $\overline{A_0\,C_0} = 1,25$ LE

Flächeninhalt einer Raute

Gegeben: $A = 3$ FE, $\overline{B_n\,D_n} = 5$ LE

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n\,C_n} \cdot \overline{B_n\,D_n}$$

$$3 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_n\,C_n} \cdot 5$$

$$3 = \frac{5}{2} \cdot \overline{A_n\,C_n} \qquad | \quad : \frac{5}{2}$$

$$\overline{A_n\,C_n} = 1,2$$

Wenn es eine Raute mit Flächeninhalt 3 FE gäbe, so hätte die Strecke $[A_n\,C_n]$ die Länge $1,2$.

Da wir aber oben gezeigt haben, dass die Strecken $[A_n\,C_n]$ mindestens eine Länge von $1,25$ LE haben, gibt es keine Raute mit Flächeninhalt 3 FE.

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Rauten $A_3\,B_3\,C_3\,D_3$ und $A_4\,B_4\,C_4\,D_4$ sind Quadrate.
Ermitteln Sie durch Rechnung die Koordinaten der Punkte A_3 und A_4. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $\overline{A_n\,C_n}(x) = (0,25x^2 - x + 2,25)$ LE, $\overline{B_n\,D_n} = 5$ LE

Erläuterung: *Gleichsetzen*

In einem Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich lang.

Deshalb wird $\overline{A_n\,C_n}(x)$ mit $\overline{B_n\,D_n}$ gleichgesetzt.

$$\overline{A_n\,C_n}(x) = \overline{B_n\,D_n}$$

$$0,25x^2 - x + 2,25 = 5 \qquad | \quad -5$$

$$0,25x^2 - x - 2,75 = 0$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot (-2,75)}}{2 \cdot 0,25}$$

$x_1 \approx 5,87$ und $x_2 \approx -1,87$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x_1 = 5,87$ und $x_2 = -1,87$ werden in $A_n(x| - 0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$ eingesetzt.

$\Rightarrow \quad A_3(-1,87|0,94)$

$\Rightarrow \quad A_4(5,87| - 2,93)$

Aufgabe B1.6 (4 Punkte)

Die Diagonalen der Rauten $A_5\,B_5\,C_5\,D_5$ und $A_6\,B_6\,C_6\,D_6$ schneiden sich jeweils auf der x-Achse.
Berechnen Sie die x-Koordinaten der Punkte A_5 und A_6. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A_n(x| - 0,25x^2 + 0,5x + 2,75)$, $C_n(x| - 0,5x + 5)$

Zuerst wird die y-Koordinate der Schnittpunkte M_n der beiden Diagonalen berechnet.

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt M einer Strecke $[A\,B]$ mit $A(x_1|y_1)$ und $B(x_2|y_2)$ ist gegeben durch:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big|\frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$y_{M_n} = \frac{y_{A_n} + y_{C_n}}{2}$$

$$y_{M_n} = \frac{-0,25x^2 + 0,5x + 2,75 + (-0,5x + 5)}{2}$$

$$y_{M_n} = \frac{-0,25x^2 + 7,75}{2}$$

Die Punkte M_5 und M_6 liegen auf der x-Achse.

$\Rightarrow \quad y_{M_n} = 0$

$\frac{-0,25x^2 + 7,75}{2} = 0 \quad | \quad \cdot 2$

$-0,25x^2 + 7,75 = 0 \quad | \quad -7,75$

$-0,25x^2 = -7,75 \quad | \quad :(-0,25)$

$x^2 = 31 \quad | \quad \sqrt{}$

$\Rightarrow \quad x_{M_5} \approx -5,57$ und $x_{M_6} = 5,57$