Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Daphne plant eine Teilnahme bei „Jugend forscht“. Für ihren Beitrag hat sie bereits mehrere Untersuchungen zur Vermehrung von Wasserflöhen in Aquarien durchgeführt. Bei ihrem aktuellen Versuch startet sie mit 120 Wasserflöhen. Sie geht davon aus, dass sich die Anzahl der Wasserflöhe in den nächsten Wochen täglich um 35% vergrößern wird.

Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Tage seit dem Beginn des Versuchs und der Anzahl y der Wasserflöhe lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschreiben ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+;\ y_0 \in \mathbb{R}^+;\ k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).
Geben Sie die Funktionsgleichung an.

Aufgabe A1.2 (1 Punkt)

Bestimmen Sie durch Rechnung die voraussichtliche Anzahl der Wasserflöhe am Ende des dritten Versuchstages.

Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie, am wievielten Versuchstag die Anzahl der Wasserflöhe voraussichtlich erstmals größer als 500 sein wird.

Aufgabe A1.4 (2 Punkte)

Am Ende der ersten Woche seit dem Beginn des Versuchs zählt Daphne genau 838 Wasserflöhe.
War Daphnes Annahme, dass sich die Anzahl der Wasserflöhe täglich um 35% vergrößern wird, zutreffend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Aufgabe A1.

Daphne plant eine Teilnahme bei „Jugend forscht“. Für ihren Beitrag hat sie bereits mehrere Untersuchungen zur Vermehrung von Wasserflöhen in Aquarien durchgeführt. Bei ihrem aktuellen Versuch startet sie mit 120 Wasserflöhen. Sie geht davon aus, dass sich die Anzahl der Wasserflöhe in den nächsten Wochen täglich um 35% vergrößern wird.

Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der Tage seit dem Beginn des Versuchs und der Anzahl y der Wasserflöhe lässt sich näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = y_0 \cdot k^x$ beschreiben ($G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+;\ y_0 \in \mathbb{R}^+;\ k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$).
Geben Sie die Funktionsgleichung an.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Exponentielles Wachstum

Gegeben ist die Anzahl der Wasserflöhe beim Versuchsstart $y_0 = 120$ und die tägliche Zuwachsrate von 35%.

Gesucht ist eine Exponentialgleichung der Form $y = y_0 \cdot k^x$. Es muss also noch k bestimmt werden.

Vorüberlegung: Wieviel Wasserflöhe sind nach einem Tag im Aquarium?

Erläuterung: *Prozentrechnung*

35% von 120 Wasserflöhen kommen nach einem Tag hinzu.

35% von 120 sind: $\frac{35}{100} \cdot 120$

$y_1 = 120 + \frac{35}{100} \cdot 120$

$y_1 = 120 + \frac{35}{100} \cdot 120 = 162$ Wasserflöhe nach einem Tag

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Einsetzen*

$y_1 = 162,\ y_0 = 120$ und $x = 1$ werden in die Gleichung $y = y_0 \cdot k^x$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach k aufgelöst.

$y = y_0 \cdot k^x$

$162 = 120 \cdot k^1 \quad | \quad : 120$

$1,35 = k$

$\Rightarrow \quad y = 120 \cdot 1,35^x$

Aufgabe A1.2 (1 Punkte)

Bestimmen Sie durch Rechnung die voraussichtliche Anzahl der Wasserflöhe am Ende des dritten Versuchstages.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $x = 3$

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 3$ wird in die Gleichung $y = 120 \cdot 1,35^x$ eingesetzt.

$y = 120 \cdot 1,35^x$

$y = 120 \cdot 1,35^3$

$y \approx 295$

Antwort:
Am Ende des dritten Versuchstages sind voraussichtlich 295 Wasserflöhe im Becken.

Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie, am wievielten Versuchstag die Anzahl der Wasserflöhe voraussichtlich erstmals größer als 500 sein wird.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $y = 501$ (erstmals größer als 500)

Gesucht: x

Erläuterung: *Einsetzen*

$y = 501$ wird in die Gleichung $y = 120 \cdot 1,35^x$ eingesetzt.

Anschließend wird die Gleichung nach x aufgelöst.

$y = 120 \cdot 1,35^x$

$501 = 120 \cdot 1,35^x \quad | \quad : 120$

$\frac{501}{120} = 1,35^x \quad | \quad \log_{1,35}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,35^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,35}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = \log_2 8$

$\log_{1,35} \frac{501}{120} = x$

$x \approx 4,76$

Nach 4,76 Tagen sind 501 Wasserflöhe vorhanden.

$\Rightarrow$ Antwort:
Am 5. Versuchstag sind vermutlich mehr als 500 Wasserflöhe im Aquarium.

© Realschulrep.de

Aufgabe A1.4 (2 Punkte)

Am Ende der ersten Woche seit dem Beginn des Versuchs zählt Daphne genau 838 Wasserflöhe.
War Daphnes Annahme, dass sich die Anzahl der Wasserflöhe täglich um 35% vergrößern wird, zutreffend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe A1.4

Exponentielles Wachstum

Gegeben: $x = 7,\ y = 838$

Gesucht: k

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 7$ und $y = 838$ werden in die Gleichung $y = 120 \cdot k^x$ eingesetzt.

Anschließend wird nach k aufgelöst und überprüft, ob das Ergebnis mit $k = 1,35$ (Daphnes Annahme) übereinstimmt.

$838 = 120 \cdot k^7 \quad | \quad : 120$

$\frac{838}{120} = k^7 \quad | \quad \sqrt[7]{\ }$

$k = \sqrt[7]{\frac{838}{120}} \approx 1,32$

$\Rightarrow$ Zunahme um 32%

$\Rightarrow$ Antwort:
Daphnes Annahme, dass sich die Wasserflöhe täglich um 35% vermehren, war falsch.