

Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke $AB_nC_nD_nE$. Die Eckpunkte C_n und der Mittelpunkt F der Seite $[AE]$ liegen auf der Symmetrieachse.

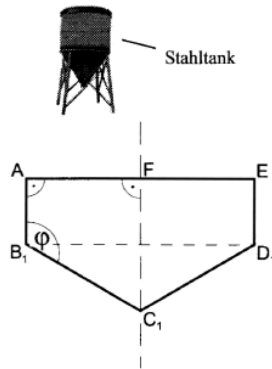
Es gilt:

$$\overline{AE} = 2,00 \text{ m}; \quad \overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n};$$

$$\angle B_n A E = 90^\circ; \quad \angle A F C_n = 90^\circ.$$

Die Winkel $C_n B_n A$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [104,04^\circ; 160,02^\circ]$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck $AB_1C_1D_1E$ für $\varphi = 120^\circ$.



Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Stahltanks in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90^\circ) \text{ m}^3]$$

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.

Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß φ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A3.

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke $AB_nC_nD_nE$. Die Eckpunkte C_n und der Mittelpunkt F der Seite $[AE]$ liegen auf der Symmetrieachse.

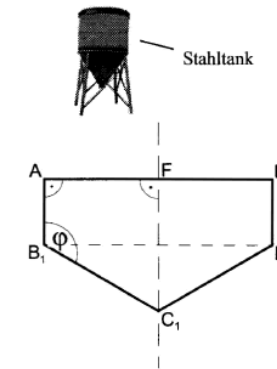
Es gilt:

$$\overline{AE} = 2,00 \text{ m}; \quad \overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n};$$

$$\angle B_n A E = 90^\circ; \quad \angle A F C_n = 90^\circ.$$

Die Winkel $C_n B_n A$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [104,04^\circ; 160,02^\circ]$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck $AB_1C_1D_1E$ für $\varphi = 120^\circ$.



Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Stahltanks in Abhängigkeit von φ .

$$[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90^\circ) \text{ m}^3]$$

Lösung zu Aufgabe A3.1

Volumen eines Rotationskörpers

Gegeben:

$$\overline{AE} = 2,00 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} = 1,00 \text{ m}$$

Seien G_n die Schnittpunkte von $[B_n D_n]$ und $[F C_n]$.

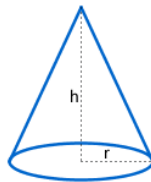
$$\overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n} \quad \Rightarrow \quad \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$$

Der Stahltank ist ein zusammengesetzter Körper aus Zylinder und Kegel.

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders, Volumen eines Kegels*

Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Tank}} = V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{Kegel}}$$

$$V_{\text{Tank}} = r^2 \cdot \pi \cdot h_{\text{Zylinder}} + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{\text{Kegel}}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Im Stahltank ist der Radius des Zylinders zugleich der Radius des Kegels.

Nun wird $r^2 \cdot \pi$ ausgeklammert.

$$V_{\text{Tank}} = r^2 \cdot \pi \cdot \left(h_{\text{Zylinder}} + \frac{1}{3} \cdot h_{\text{Kegel}} \right)$$

Erläuterung: *Einsetzen*

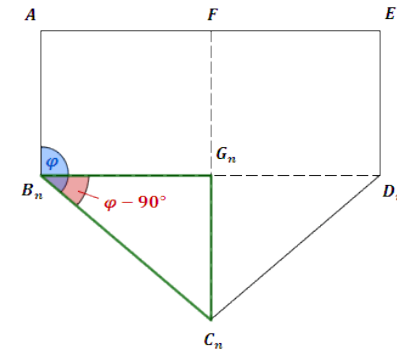
Der Radius $r = \overline{AF} = 1,00 \text{ m}$, die Höhe $h_{\text{Zylinder}} = \overline{AB_n}$ und die Höhe $h_{\text{Kegel}} = \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$ werden in die Formel für das Tankvolumen eingesetzt.

$$V_{\text{Tank}} = 1^2 \cdot \pi \cdot \left(\overline{AB_n} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AB_n} \right)$$

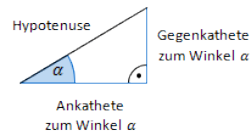
$$V_{\text{Tank}} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{AB_n}$$

Nun muss noch $\overline{AB_n}$ berechnet werden.

Da $\overline{AB_n} = \overline{G_n C_n}$ und das Tankvolumen in Abhängigkeit von φ berechnet werden soll, betrachtet man das Dreieck $B_n C_n G_n$.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im Dreieck $B_n C_n G_n$ gilt:

$$\tan(\varphi - 90^\circ) = \frac{\overline{G_n C_n}}{\overline{B_n G_n}} = \frac{\overline{A B_n}}{1}$$

$$\Rightarrow \overline{A B_n} = \tan(\varphi - 90^\circ)$$

$$V_{T_{ank}} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{A B_n}^3$$

$$\Rightarrow V_{T_{ank}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan^3(\varphi - 90^\circ)$$

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.

Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß φ . Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Umrechnung von Einheiten

$$\text{Gegeben: } V = 5000 \text{ l}, V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan^3(\varphi - 90^\circ) \text{ m}^3$$

Bevor $V = 5000 \text{ l}$ eingesetzt werden kann, muss die Einheit Liter in Kubikmeter umgewandelt werden.

Es gilt:

$$1 \text{ dm}^3 \hat{=} 1 \text{ l} \quad | \quad \cdot 1000$$

$$1 \text{ m}^3 \hat{=} 1000 \text{ l} \quad | \quad \cdot 5$$

$$5 \text{ m}^3 \hat{=} 5000 \text{ l}$$

$$\Rightarrow V = 5000 \text{ l} = 5 \text{ m}^3$$

Winkel bestimmen

Winkel bestimmen:

$$5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90^\circ) \quad | \quad : \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \right)$$

$$\frac{15}{4\pi} = \tan(\varphi - 90^\circ)$$

$$\varphi - 90^\circ = \tan^{-1} \left(\frac{15}{4\pi} \right) \approx 50,05^\circ \quad | \quad +90^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 140,05^\circ$$