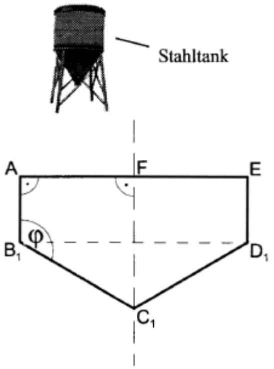
Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke $A\,B_n\,C_n\,D_n\,E$. Die Eckpunkte C_n und der Mittelpunkt F der Seite $[A\,E]$ liegen auf der Symmetrieachse.
Es gilt:
$\overline{A\,E} = 2{,}00\,\mathrm{m}$; $\overline{F\,C_n} = 2\cdot\overline{A\,B_n}$;
$\measuredangle B_n\,A\,E = 90°$; $\measuredangle A\,F\,C_n = 90°$.
Die Winkel $C_n\,B_n\,A$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [104{,}04°; 160{,}02°]$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck $A\,B_1\,C_1\,D_1\,E$ für $\varphi = 120°$.



Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Stahltanks in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\tan(\varphi - 90°)\mathrm{m}^3$]

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

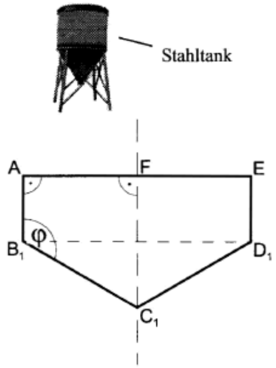
Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.
Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß φ. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A3.

Eine Firma stellt Stahltanks her. Als Axialschnitte ergeben sich achsensymmetrische Fünfecke $A\,B_n\,C_n\,D_n\,E$. Die Eckpunkte C_n und der Mittelpunkt F der Seite $[A\,E]$ liegen auf der Symmetrieachse.
Es gilt:
$\overline{A\,E} = 2{,}00\,\mathrm{m}$; $\overline{F\,C_n} = 2\cdot\overline{A\,B_n}$;
$\measuredangle B_n\,A\,E = 90°$; $\measuredangle A\,F\,C_n = 90°$.
Die Winkel $C_n\,B_n\,A$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [104{,}04°; 160{,}02°]$.

Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck $A\,B_1\,C_1\,D_1\,E$ für $\varphi = 120°$.



Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Stahltanks in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\tan(\varphi - 90°)\mathrm{m}^3$]

Lösung zu Aufgabe A3.1

Volumen eines Rotationskörpers

Gegeben:

$\overline{AE} = 2{,}00\,m \quad \Rightarrow \quad \overline{AF} = 1{,}00\,m$

Seien G_n die Schnittpunkte von $[B_n D_n]$ und $[F C_n]$.

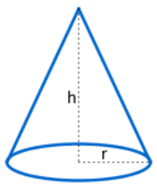
$\overline{FC_n} = 2 \cdot \overline{AB_n} \quad \Rightarrow \quad \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$

Der Stahltank ist ein zusammengesetzter Körper aus Zylinder und Kegel.

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders, Volumen eines Kegels*

Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$V_{Tank} = V_{Zylinder} + V_{Kegel}$

$V_{Tank} = r^2 \cdot \pi \cdot h_{Zylinder} + \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{Kegel}$

Erläuterung: *Ausklammern*

Im Stahltank ist der Radius des Zylinders zugleich der Radius des Kegels.

Nun wird $r^2 \cdot \pi$ ausgeklammert.

$V_{Tank} = r^2 \cdot \pi \cdot \left(h_{Zylinder} + \frac{1}{3} \cdot h_{Kegel} \right)$

Erläuterung: *Einsetzen*

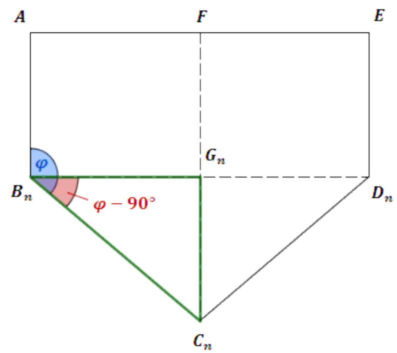
Der Radius $r = \overline{AF} = 1{,}00\,m$, die Höhe $h_{Zylinder} = \overline{AB_n}$ und die Höhe $h_{Kegel} = \overline{G_n C_n} = \overline{AB_n}$ werden in die Formel für das Tankvolumen eingesetzt.

$V_{Tank} = 1^2 \cdot \pi \cdot \left(\overline{AB_n} + \frac{1}{3} \cdot \overline{AB_n} \right)$

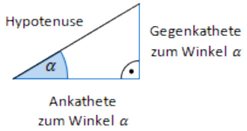
$V_{Tank} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{AB_n}$

Nun muss noch $\overline{AB_n}$ berechnet werden.

Da $\overline{AB_n} = \overline{G_n C_n}$ und das Tankvolumen in Abhängigkeit von φ berechnet werden soll, betrachtet man das Dreieck $B_n C_n G_n$.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im Dreieck $B_n C_n G_n$ gilt:

$$\tan(\varphi - 90°) = \frac{\overline{G_n C_n}}{\overline{B_n G_n}} = \frac{\overline{A B_n}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{A B_n} = \tan(\varphi - 90°)$$

$$V_{Tank} = \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \overline{A B_n}$$

$$\Rightarrow \quad V_{Tank} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°)$$

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Der am häufigsten verkaufte Stahltank hat ein Volumen von 5000 Litern.
Ermitteln Sie durch Rechnung das zugehörige Winkelmaß φ. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Umrechnung von Einheiten

Gegeben: $V = 5000\,l,\ V(\varphi) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°) m^3$

Bevor $V = 5000\,l$ eingesetzt werden kann, muss die Einheit Liter in Kubikmeter umgewandelt werden.

Es gilt:

$$1\,dm^3 \mathrel{\widehat{=}} 1\,l \quad | \quad \cdot 1000$$

$$1\,m^3 \mathrel{\widehat{=}} 1000\,l \quad | \quad \cdot 5$$

$$5\,m^3 \mathrel{\widehat{=}} 5000\,l$$

$$\Rightarrow \quad V = 5000\,l = 5\,m^3$$

Winkel bestimmen

Winkel bestimmen:

$$5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \tan(\varphi - 90°) \quad | \quad : \left(\frac{4}{3} \cdot \pi\right)$$

$$\frac{15}{4\pi} = \tan(\varphi - 90°)$$

$$\varphi - 90° = \tan^{-1}\left(\frac{15}{4\pi}\right) \approx 50,05° \quad | \quad +90°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi \approx 140,05°$$