Mittlere-Reife-Prüfung 2011 Mathematik I Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche eines geraden Prismas $ABCDEFGH$. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Raute $ABCD$ ist der Punkt T. Der Schnittpunkt der Diagonalen $[EG]$ und $[FH]$ der Raute $EFGH$ ist der Punkt M.
Es gilt: $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$; $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$; $\overline{AE} = 7\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}; \omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CAM.
[Ergebnis: $\measuredangle CAM = 54,46°$]

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AM]$. Die Winkel P_nCA haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 54,46°]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken BDP_n mit der gemeinsamen Basis $[BD]$.
Die Winkel BP_nD haben das Maß ε.
Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30°$ in das Schrägbild zu 1.1 ein.
Für alle Dreiecke BDP_n gilt: $\varepsilon \in [46,40°; 72,79°]$.
Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Das Dreieck BDP_2 ist gleichseitig.
Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[AP_2]$.
[Teilergebnis: $\overline{TP_2} = 5,20\,\text{cm}$]

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[CP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{CP_n}(\varphi) = \dfrac{8,14}{\sin(54,46° + \varphi)}\,\text{cm}.$

Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$ mit den Höhen $[P_nK_n]$, deren Fußpunkte K_n auf der Strecke $[AT]$ liegen.
Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDP_1$ und ihre Höhe $[P_1K_1]$ in das Schrägbild zu 1.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \dfrac{81,4 \cdot \sin\varphi}{\sin(54,46° + \varphi)}\,\text{cm}^3$]

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_3$ beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas $ABCDEFGH$.
Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Raute $ABCD$ mit den Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ ist die Grundfläche eines geraden Prismas $ABCDEFGH$. Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Raute $ABCD$ ist der Punkt T. Der Schnittpunkt der Diagonalen $[EG]$ und $[FH]$ der Raute $EFGH$ ist der Punkt M.
Es gilt: $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$; $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$; $\overline{AE} = 7\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei die Strecke $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}; \omega = 45°$.
Berechnen Sie sodann das Maß des Winkels CAM.
[Ergebnis: $\measuredangle CAM = 54,46°$]

Lösung zu Aufgabe B1.1

Skizze

Prisma $ABCDEFGH$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) $[AC]$ mit $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$ einzeichnen

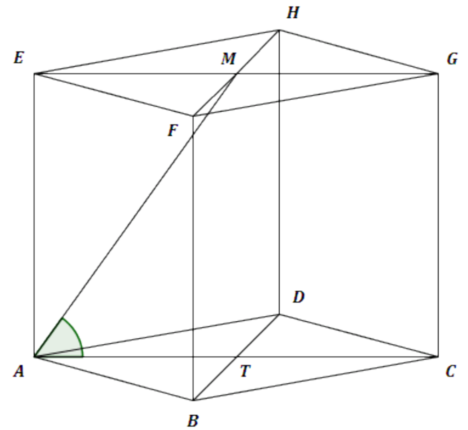
2) $[BD]$ durch Mittelpunkt von $[AC]$ im Winkel von $45°$ einzeichnen
   Für die Zeichnung: $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 6\ \text{cm} = 3\,\text{cm}$, $\overline{BT} = \overline{TD} = 1,5\ \text{cm}$

3) Raute $ABCD$ verbinden

4) $[AE]$ mit $\overline{AE} = 7\ \text{cm}$ einzeichnen

5) Weitere Kanten $[BF]$, $[CG]$ und $[DH]$ mit Höhe von $7\ \text{cm}$ einzeichnen

6) Deckfläche und Prisma verbinden



Winkel bestimmen

Gegeben:

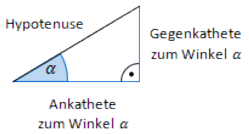
$\overline{AC} = 10\,cm \quad \Rightarrow \quad \overline{AT} = 5\,cm$

$\overline{AE} = 7\,cm \quad \Rightarrow \quad \overline{MT} = 7\,cm$

Gesucht: $\measuredangle CAM$

Man betrachtet das Dreieck ATM.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan(\measuredangle CAM) = \frac{\overline{MT}}{\overline{AT}} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \measuredangle CAM = \tan^{-1}\frac{7}{5} = 54,46^\circ$$

Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AM]$. Die Winkel P_nCA haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 54,46^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken BDP_n mit der gemeinsamen Basis $[BD]$.
Die Winkel BP_nD haben das Maß ε.
Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30^\circ$ in das Schrägbild zu 1.1 ein.
Für alle Dreiecke BDP_n gilt: $\varepsilon \in [46,40^\circ; 72,79^\circ]$.
Begründen Sie die obere Intervallgrenze.

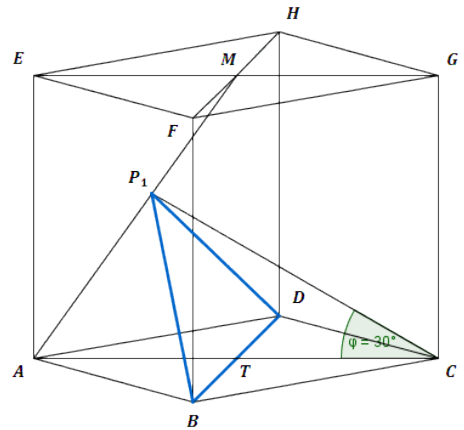
Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze

Dreieck BDP_1 für $\varphi = 30^\circ$ einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Zuerst wird der Winkel $\varphi = 30^\circ$ eingezeichnet. Der Schenkel dieses Winkels schneidet die Strecke $[AM]$ im Punkt P_1.



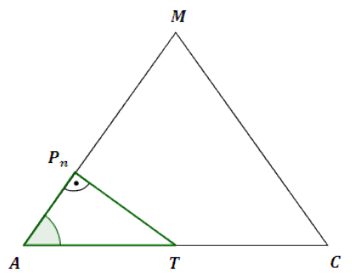
Winkel bestimmen

Gesucht ist der größte Wert, den ε annehmen kann.

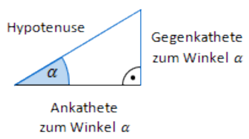
$\overline{TP_n}$ ist die Höhe der gleichschenkligen Dreiecke BDP_n.

ε ist genau dann am größten, wenn die Höhe $\overline{TP_n}$ minimal ist.

$\overline{TP_n}$ ist genau dann minimal, wenn $[TP_n]$ senkrecht auf $[AM]$ steht. Für diesen Fall betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ATP_n.



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck ATP_n gilt:

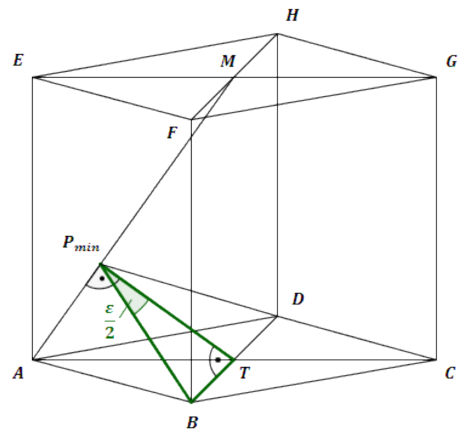
$$\sin\measuredangle CAM = \frac{\overline{TP_n}}{\overline{AT}}$$

$$\sin 54,46^\circ = \frac{\overline{TP_{min}}}{5} \qquad | \quad \cdot 5$$

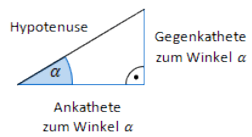
$$\overline{TP_{min}} = 5\cdot\sin 54,46^\circ$$

Für diesen kleinsten Wert $\overline{TP_{min}}$ muss jetzt noch ε berechnet werden.

Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck BTP_{min}.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Ankathete zu }\alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck BTP_{min} gilt:

$$\tan\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{BT}}{\overline{TP_{min}}} = \frac{3}{5\cdot\sin 54,46^\circ}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5\cdot\sin 54,46^\circ}\right) \qquad | \quad \cdot 2$$

$$\varepsilon = 2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{3}{5\cdot\sin 54,46^\circ}\right)$$

$$\varepsilon \approx 72,79^\circ$$

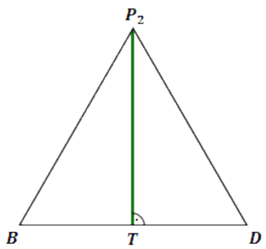
Aufgabe B1.3 (3 Punkte)

Das Dreieck $B\,D\,P_2$ ist gleichseitig.
Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Strecke $[A\,P_2]$.
[Teilergebnis: $\overline{T\,P_2} = 5,20\,\text{cm}$]

Lösung zu Aufgabe B1.3

Länge einer Strecke

Zuerst berechnet man die Höhe $T\,P_2$ des gleichseitigen Dreiecks $B\,D\,P_2$.



Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

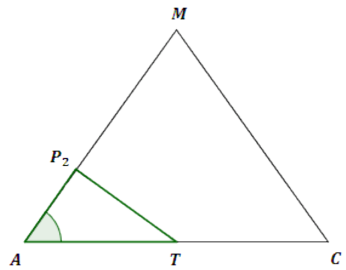
Die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet man mit folgender Formel:

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

$$\overline{T\,P_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \overline{B\,D}$$

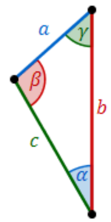
$$\overline{T\,P_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 6 \approx 5,20\,\text{cm}$$

Zur Berechnung von $\overline{A\,P_2}$ betrachtet man das Dreieck $A\,T\,P_2$.



In diesem Dreieck sind $\overline{A\,T} = 5\,\text{cm}$, $\overline{T\,P_2} = 5,20\,\text{cm}$ und $\measuredangle C\,A\,M = \measuredangle T\,A\,P_2 = 54,46°$ gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\overline{A\,T}}{\overline{T\,P_2}} = \frac{\sin\measuredangle A\,P_2\,T}{\sin 54,46°}$$

$$\Rightarrow \sin\measuredangle A\,P_2\,T = \frac{\overline{A\,T} \cdot \sin 54,46°}{\overline{T\,P_2}}$$

$\Rightarrow \sin\measuredangle A P_2 T = \dfrac{5 \cdot \sin 54,46^\circ}{5,2}$

$\Rightarrow \measuredangle A P_2 T \approx 51,48^\circ$

$\dfrac{\overline{A P_2}}{\overline{A T}} = \dfrac{\sin\measuredangle A T P_2}{\sin\measuredangle A P_2 T}$

$\Rightarrow \overline{A P_2} = \dfrac{\overline{A T} \cdot \sin\measuredangle A T P_2}{\sin\measuredangle A P_2 T}$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich 180°.

Also hat der Winkel $\measuredangle A T P_2$ eine Größe von $180^\circ - 54,46^\circ - 51,48^\circ = 74,06^\circ$.

$\Rightarrow \overline{A P_2} = \dfrac{5 \cdot \sin 74,06^\circ}{\sin 51,48^\circ}$

$\Rightarrow \overline{A P_2} \approx 6,14\,\text{cm}$

Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

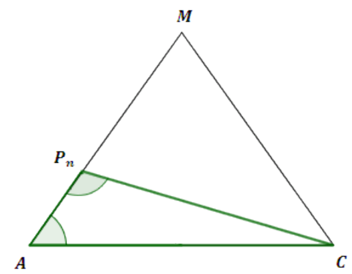
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken $[C P_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{C P_n}(\varphi) = \dfrac{8,14}{\sin(54,46^\circ + \varphi)}$ cm.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Länge einer Strecke

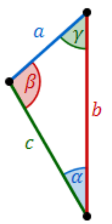
Gesucht: $\overline{C P_n}(\varphi)$

Man betrachtet das Dreieck $A C P_n$.



In diesem Dreieck sind $\overline{A C} = 10\,\text{cm}$ und $\measuredangle C A P_n = \measuredangle C A M = 54,46^\circ$ gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Anders formuliert:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \dfrac{a}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

Im Dreieck $A C P_n$ gilt:

$\dfrac{\overline{A C}}{\sin\measuredangle A P_n C} = \dfrac{\overline{C P_n}}{\sin\measuredangle C A P_n}$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Also hat der Winkel $\measuredangle A\,P_n\,C$ eine Größe von $180° - (54{,}46° + \varphi)$.

$$\frac{10}{\sin\,(180° - (54{,}46° + \varphi))} = \frac{\overline{C\,P_n}}{\sin 54{,}46°}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$\sin x = \sin(180° - x)$

$$\frac{10}{\sin\,(54{,}46° + \varphi)} = \frac{\overline{C\,P_n}}{\sin 54{,}46°} \qquad | \quad \cdot \sin 54{,}46°$$

$$\overline{C\,P_n} = \frac{10 \cdot \sin 54{,}46°}{\sin\,(54{,}46° + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{C\,P_n}(\varphi) = \frac{8{,}14}{\sin(54{,}46° + \varphi)}\,\text{cm}$$

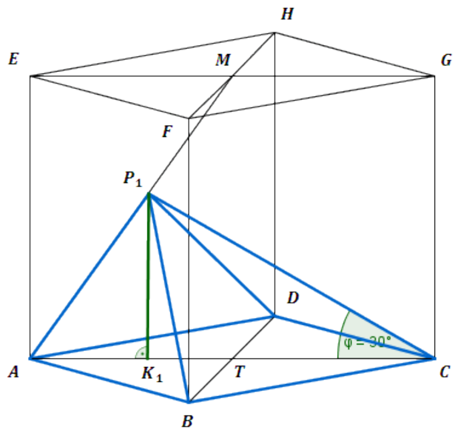
Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $A\,B\,C\,D\,P_n$ mit den Höhen $[P_n\,K_n]$, deren Fußpunkte K_n auf der Strecke $[A\,T]$ liegen.
Zeichnen Sie die Pyramide $A\,B\,C\,D\,P_1$ und ihre Höhe $[P_1\,K_1]$ in das Schrägbild zu 1.1 ein und ermitteln Sie sodann rechnerisch das Volumen V der Pyramiden $A\,B\,C\,D\,P_n$ in Abhängigkeit von φ.
[Ergebnis: $V(\varphi) = \dfrac{81{,}4 \cdot \sin\varphi}{\sin(54{,}46° + \varphi)}\,\text{cm}^3$]

Lösung zu Aufgabe B1.5

Skizze

Pyramide $A\,B\,C\,D\,P_1$ und Höhe $[P_1\,K_1]$ einzeichnen:



Volumen einer Pyramide

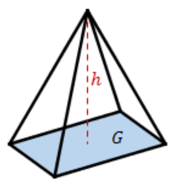
Gegeben:

$\overline{A\,C} = 10\,\text{cm}$, $\overline{B\,D} = 6\,\text{cm}$

Gesucht:

Volumen V der Pyramiden $A\,B\,C\,D\,P_n$ in Abhängigkeit von φ

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

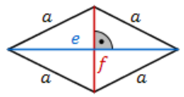
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Die Grundfläche G ist die Raute $A\,B\,C\,D$.

Die Höhe h ist die Strecke $[P_n\,K_n]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

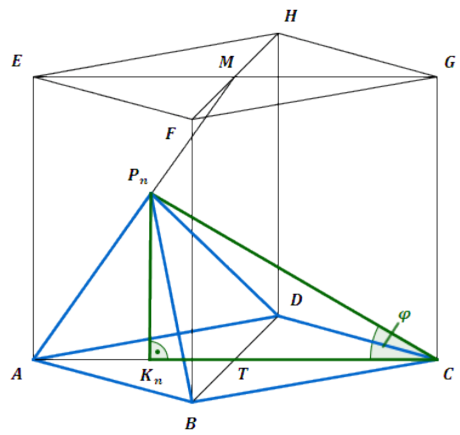
In der Raute $A\,B\,C\,D$ gilt:

$e = \overline{A\,C} = 10\,\text{cm},\;\; f = \overline{B\,D} = 6\,\text{cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \overline{P_n\,K_n} = 10 \cdot \overline{P_n\,K_n}$

Zur Berechnung von $\overline{P_n\,K_n}$ wird das rechtwinklige Dreieck $K_n\,C\,P_n$ betrachtet.



Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse}}$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Im rechtwinkligen Dreieck $K_n\,C\,P_n$ gilt:

$\sin\varphi = \frac{\overline{P_n\,K_n}}{\overline{C\,P_n}} \quad | \quad \cdot\overline{C\,P_n} \qquad \left(\overline{C\,P_n} = \frac{8,14}{\sin(54,46° + \varphi)}\; vgl. Aufgabe\ 1.4\right)$

$\overline{P_n\,K_n} = \sin\varphi \cdot \overline{C\,P_n} = \sin\varphi \cdot \frac{8,14}{\sin(54,46° + \varphi)}$

$V = 10 \cdot \overline{P_n\,K_n}$

$\Rightarrow \quad V(\varphi) = \frac{81,4 \cdot \sin\varphi}{\sin(54,46° + \varphi)}\,\text{cm}^3$

Aufgabe B1.6 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,P_3$ beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H$.

Berechnen Sie das zugehörige Winkelmaß φ.

Lösung zu Aufgabe B1.6

Volumen eines Prismas

Gegeben:

$\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{BD} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AE} = 7\,\text{cm}$

Zunächst muss das Volumen des Prismas $ABCDEFGH$ berechnet werden.

Erläuterung: *Volumen eines Prismas*

Ein Prisma mit der Grundfläche G und der Höhe h hat ein Volumen von:

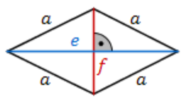
$V = G \cdot h$

$V = G \cdot h$

Die Grundfläche G ist die Raute $ABCD$.

Die Höhe h ist die Strecke $[AE]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt einer Raute*



Eine Raute mit Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

In der Raute $ABCD$ gilt:

$e = \overline{AC} = 10\,\text{cm}$, $f = \overline{BD} = 6\,\text{cm}$

$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot h$

$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 = 210\,\text{cm}^3$

Winkel bestimmen

Gegeben: $V_{Pyramide}(\varphi) = \dfrac{81,4 \cdot \sin\varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)}\,\text{cm}^3$

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_3$ beträgt ein Viertel des Volumens des Prismas $ABCDEFGH$.

$\Rightarrow \quad V_{ABCDP_3} = \frac{1}{4} \cdot V_{Prisma}$

$\dfrac{81,4 \cdot \sin\varphi}{\sin(54,46^\circ + \varphi)} = \dfrac{1}{4} \cdot 210 \quad | \quad \cdot \sin(54,46^\circ + \varphi)$

$81,4 \cdot \sin\varphi = 52,5 \cdot \sin(54,46^\circ + \varphi)$

Erläuterung: *Additionstheorem*

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$81,4 \cdot \sin\varphi = 52,5 \cdot (\sin 54,46^\circ \cdot \cos\varphi + \cos 54,46^\circ \cdot \sin\varphi)$

$81,4 \cdot \sin\varphi = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos\varphi + 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ \cdot \sin\varphi$

$81,4 \cdot \sin\varphi - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ \cdot \sin\varphi = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos\varphi$

$\sin\varphi \cdot (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ) = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \cdot \cos\varphi \quad | \quad : \cos\varphi$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan\varphi \cdot (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ) = 52,5 \cdot \sin 54,46^\circ \quad | \quad : (81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ)$

$\tan\varphi = \dfrac{52,5 \cdot \sin 54,46^\circ}{81,4 - 52,5 \cdot \cos 54,46^\circ} \quad | \quad \tan^{-1}$

$\Rightarrow \quad \varphi \approx 40,02^\circ$