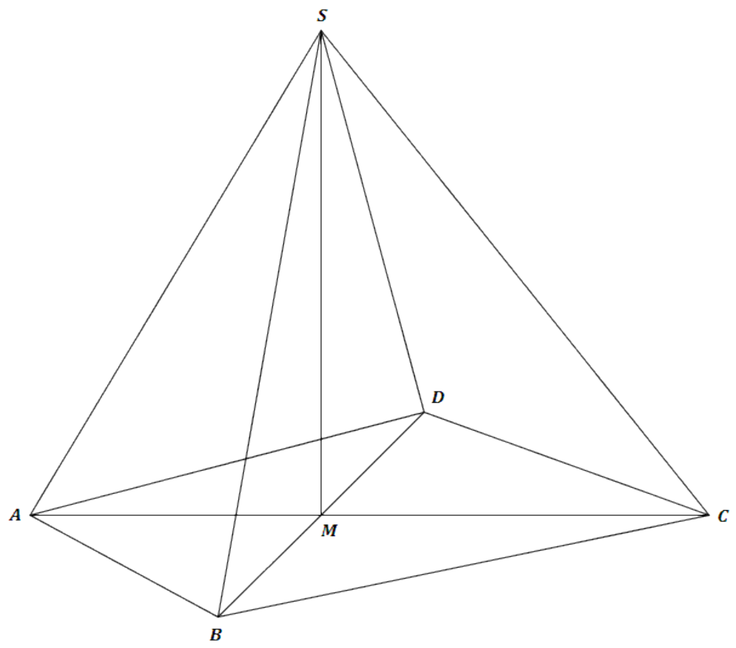
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Das Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCDS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Drachenvierecks.
Es gilt: $\overline{AC} = 14\,\text{cm}$; $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$; $\overline{BD} = 12\,\text{cm}$; $\overline{MS} = 10\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; $[AC]$ liegt auf der Schrägbildachse.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß α des Winkels CAS und die Länge der Strecke $[AS]$.
[Ergebnisse: $\alpha = 59,04°$; $\overline{AS} = 11,66$ cm]

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AS]$ mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$, $0 \leqq x \leqq 11,66$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie den Punkt P_1 für $x = 2,5$ und die Strecke $[P_1C]$ in die Zeichnung zu 2.0 ein. Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[P_1C]$ und das Maß des Winkels P_1CA.

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Unter den Strecken $[P_nC]$ hat die Strecke $[P_2C]$ die minimale Länge.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AP_2]$.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_{\Delta ABS}$ des Dreiecks ABS.

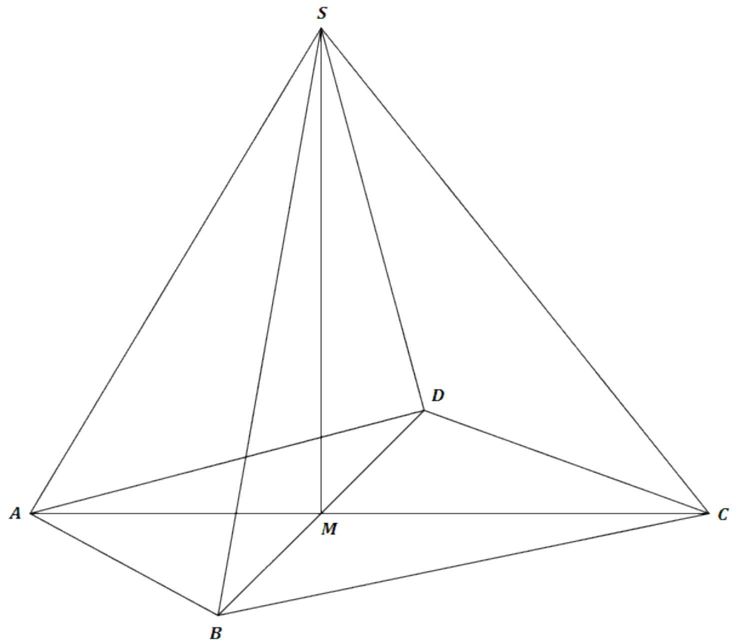
Lösung

Aufgabe A2.

Das Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse AC ist die Grundfläche der Pyramide $ABCDS$. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt M des Drachenvierecks.
Es gilt: $\overline{AC} = 14\,\text{cm}$; $\overline{AM} = 6\,\text{cm}$; $\overline{BD} = 12\,\text{cm}$; $\overline{MS} = 10\,\text{cm}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; $[AC]$ liegt auf der Schrägbildachse.



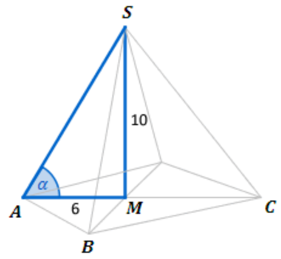
Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß α des Winkels CAS und die Länge der Strecke $[AS]$.
[Ergebnisse: $\alpha = 59,04°$; $\overline{AS} = 11,66$ cm]

Lösung zu Aufgabe A2.1

Winkel bestimmen

Man betrachtet das Dreieck AMS.



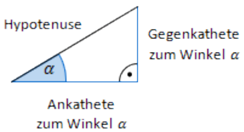
Gegeben:

$\overline{AM} = 6\,cm$

$\overline{MS} = 10\,cm$

Gesucht: $\measuredangle CAS = \alpha$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{10}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{10}{6} \approx 59{,}04°$$

Länge einer Strecke

Gesucht: $\overline{AS}$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{AS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2$$

$$\overline{AS}^2 = 6^2 + 10^2 \qquad | \quad \sqrt{}$$

$$\overline{AS} = \sqrt{6^2 + 10^2} \approx 11{,}66 \text{ cm}$$

Aufgabe A2.2 (3 Punkte)

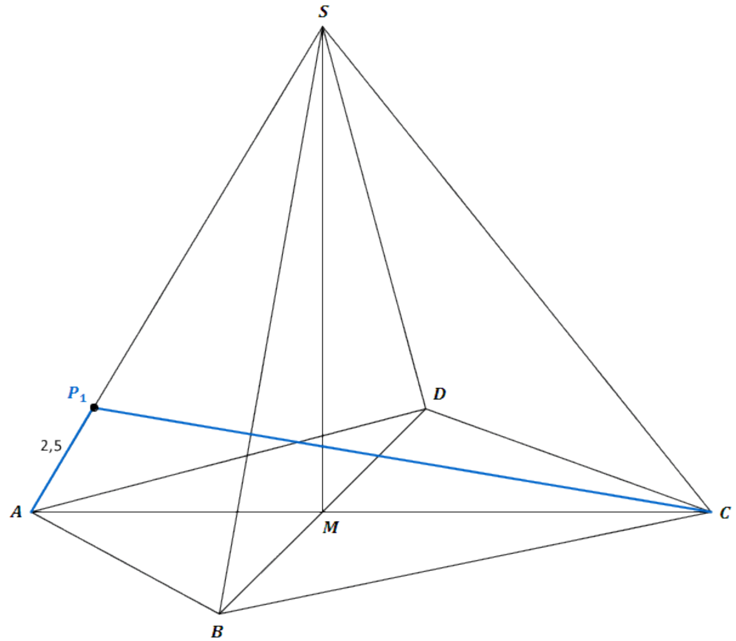
Punkte P_n liegen auf der Strecke $[AS]$ mit $\overline{AP_n} = x\,\text{cm}$, $0 \leqq x \leqq 11{,}66$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeichnen Sie den Punkt P_1 für $x = 2{,}5$ und die Strecke $[P_1C]$ in die Zeichnung zu 2.0

ein. Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke $[P_1C]$ und das Maß des Winkels P_1CA.

Lösung zu Aufgabe A2.2

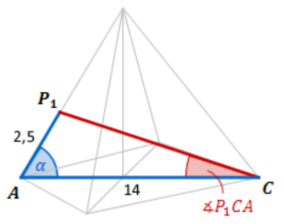
Skizze

Punkt P_1 für $x = 2{,}5$ und Strecke $[P_1C]$ einzeichnen:



Länge einer Strecke

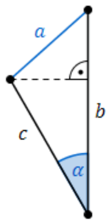
Man betrachtet das Dreieck ACP_1.



Gegeben: $\overline{A\,P_1} = 2{,}5$ cm; $\overline{A\,C} = 14$ cm; $\alpha = 59{,}04^\circ$

Gesucht: $\overline{P_1\,C}$

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{P_1\,C}^2 = \overline{A\,P_1}^2 + \overline{A\,C}^2 - 2 \cdot \overline{A\,P_1} \cdot \overline{A\,C} \cdot \cos\alpha$

$\overline{P_1\,C}^2 = 2{,}5^2 + 14^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 14 \cdot \cos 59{,}04^\circ \qquad | \sqrt{}$

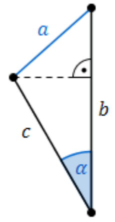
$\overline{P_1\,C}^2 = \sqrt{2{,}5^2 + 14^2 - 2 \cdot 2{,}5 \cdot 14 \cdot \cos 59{,}04^\circ}$

$\overline{P_1\,C}^2 \approx 12{,}89$ cm

Winkel bestimmen

Gesucht: $\measuredangle P_1\,C\,A$

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{A\,P_1}^2 = \overline{A\,C}^2 + \overline{P_1\,C}^2 - 2 \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{P_1\,C} \cdot \cos\measuredangle P_1\,C\,A \quad | \quad +2 \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{P_1\,C} \cdot \cos\measuredangle P_1\,C\,A - \overline{A\,P_1}^2$

$2 \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{P_1\,C} \cdot \cos\measuredangle P_1\,C\,A = \overline{A\,C}^2 + \overline{P_1\,C}^2 - \overline{A\,P_1}^2 \quad | \quad : (2 \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{P_1\,C})$

$\Rightarrow \quad \cos\measuredangle P_1\,C\,A = \dfrac{\overline{A\,C}^2 + \overline{P_1\,C}^2 - \overline{A\,P_1}^2}{2 \cdot \overline{A\,C} \cdot \overline{P_1\,C}}$

$\cos\measuredangle P_1\,C\,A = \dfrac{14^2 + 12{,}89^2 - 2{,}5^2}{2 \cdot 14 \cdot 12{,}89}$

$\measuredangle P_1\,C\,A = \cos^{-1}\left(\dfrac{14^2 + 12{,}89^2 - 2{,}5^2}{2 \cdot 14 \cdot 12{,}89}\right)$

$\measuredangle P_1\,C\,A \approx 9{,}57^\circ$

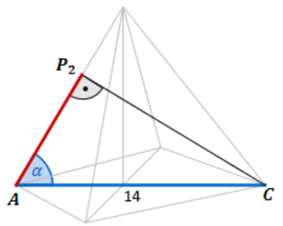
Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

Unter den Strecken $[P_n\,C]$ hat die Strecke $[P_2\,C]$ die minimale Länge.
Berechnen Sie die Länge der Strecke $[A\,P_2]$.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Länge einer Strecke

Man betrachtet das Dreieck $A\,C\,P_2$.



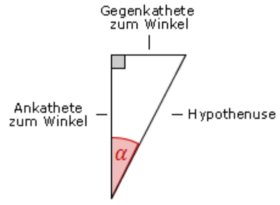
Gegeben: $\overline{A\,C} = 14\,\text{cm}$; $\alpha = 59,04°$

Gesucht: $\overline{A\,P_2}$

Die Strecke $[P_2\,C]$ ist genau dann von minimaler Länge, wenn sie senkrecht auf $[A\,P_2]$ steht.

$\Rightarrow \quad \measuredangle A\,P_2\,C = 90°$

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*



Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{A\,P_2}}{\overline{A\,C}}$

$\cos 59,04° = \dfrac{\overline{A\,P_2}}{14} \qquad | \quad \cdot 14$

$\overline{A\,P_2} = 14 \cdot \cos 59,04°$

$\overline{A\,P_2} \approx 7,20 \;\text{ cm}$

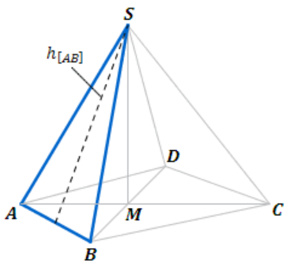
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_{\Delta\,A\,B\,S}$ des Dreiecks $A\,B\,S$.

Lösung zu Aufgabe A2.4

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben: $\overline{A\,M} = 6\,\text{cm}$; $\overline{B\,M} = 6\,\text{cm}$; $\overline{A\,S} = 11,66\,\text{cm}$; $\overline{M\,S} = 10\,\text{cm}$



Erläuterung: *Gleichschenkliges Dreieck*

$\overline{AS} = \sqrt{6^2 + 10^2} \approx 11,66$ cm (siehe Teilaufgabe A2.1)

Im rechtwinkligen Dreieck BMS gilt nach Pythagoras:

$\overline{BS}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MS}^2$

$\overline{BS} = \sqrt{6^2 + 10^2} \approx 11,66$ cm

$\Rightarrow \quad \overline{AS} = \overline{BS}$ („Schenkel“)

Man betrachtet das *gleichschenklige* Dreieck ABS mit Basis $[AB]$.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

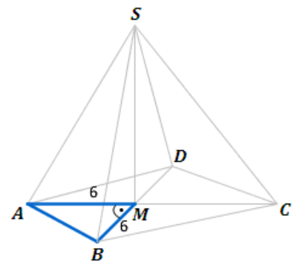
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$A_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{[AB]}$

Zur Berechnung von $\overline{AB}$ betrachtet man das rechtwinklige Dreieck ABM.



Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

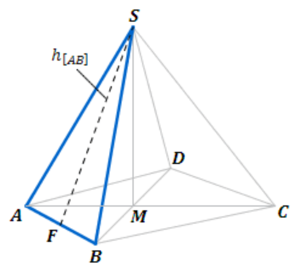
In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

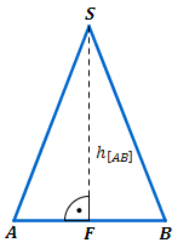
$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

$\overline{AB}^2 = 6^2 + 6^2 \qquad | \quad \sqrt{}$

$\overline{AB} = \sqrt{72} \approx 8,49$ cm

Zur Berechnung von $h_{[AB]}$ betrachtet man das Dreieck AFS.





Vorderansicht

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{AS}^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right)^2 + h_{[AB]}^2$$

$$11,66^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8,49\right)^2 + h_{[AB]}^2$$

$$h_{[AB]}^2 = 11,66^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 8,49\right)^2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$h_{[AB]} = \sqrt{11,66^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 8,49\right)^2}$$

$$h_{[AB]} \approx 10,86 \text{ cm}$$

Für den Flächeninhalt gilt dann:

$$A_{\Delta\, ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_{[AB]}$$

$$A_{\Delta\, ABS} = \frac{1}{2} \cdot 8,49 \cdot 10,86$$

$$A_{\Delta\, ABS} \approx 46,10 \text{ cm}^2$$