

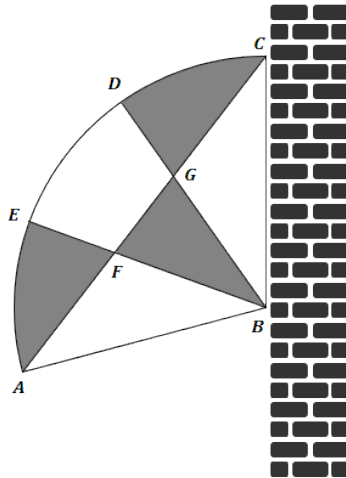
## Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe B2

### Aufgabe B2.

Nebenstehende Skizze zeigt einen kreissektorförmigen Sonnenfächer, der Balkone vor Sonne, Wind und neugierigen Blicken schützen soll. Zwei Stäbe zwischen den Punkten  $D$  und  $B$  sowie zwischen den Punkten  $E$  und  $B$  teilen den Sonnenfächer in drei kongruente Teilspektoren.

Es gilt:  $\overline{BC} = 110,0$  cm;  $b = 201,6$  cm ist die Länge des Bogens  $\widehat{CA}$ ;  $D \in \widehat{CA}$ ;  $E \in \widehat{CA}$ .

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



### Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\beta$  des Winkels  $\angle CBA$ . Zeichnen Sie den Kreissektor  $BCA$  mit dem Mittelpunkt  $B$  und dem Radius  $\overline{BC}$  sowie die Strecken  $[DB]$ ,  $[EB]$  und  $[AC]$  im Maßstab 1 : 10.

[Ergebnis:  $\beta = 105,0^\circ$ ]

### Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Um die Stabilität des Sonnenfächers zu erhöhen, wird zwischen den Punkten  $A$  und  $C$  eine Stange eingezogen, die um 5% kürzer ist als die Strecke  $[AC]$ . Bestimmen Sie rechnerisch die Länge  $l$  dieser Stange.

### Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

An den Punkten  $B$  und  $C$  wird der Sonnenfächer an einer Mauer fest verankert. Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Abstand  $d$  des Punktes  $A$  zu dieser Mauer gilt:  $d = 106,3$  cm.

### Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Die Strecke  $[AC]$  schneidet die Strecke  $[DB]$  im Punkt  $G$  und die Strecke  $[EB]$  im Punkt  $F$ . Berechnen Sie die Länge der Strecke  $[GB]$  sowie den Flächeninhalt  $A_{\triangle BGF}$  des Dreiecks  $BGF$ .

[Ergebnisse:  $\overline{GB} = 70,2$  cm;  $A_{\triangle BGF} = 1413,3$  cm<sup>2</sup>]

### Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt  $A_{CDG}$  der Figur  $CDG$ , die durch den Kreisbogen  $\widehat{CA}$  sowie die Strecken  $[DG]$  und  $[GC]$  begrenzt wird.

[Ergebnis:  $A_{CDG} = 1481,2$  cm<sup>2</sup>]

### Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Sonnenfächer soll zweifarbig gestaltet werden. Dazu werden die Flächen der Figur  $CDG$ , der Figur  $EAF$  und des Dreiecks  $BGF$  entsprechend der Skizze dunkel abgesetzt.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der helle Teil um mehr als 40% größer ist als der dunkle Teil.

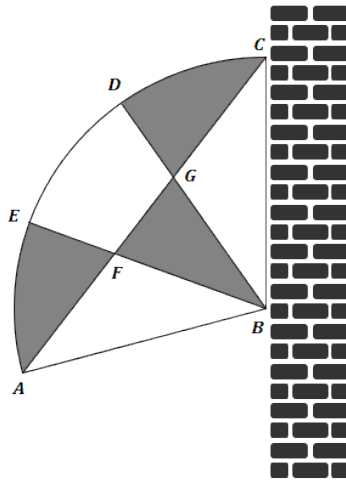
## Lösung

## Aufgabe B2.

Nebenstehende Skizze zeigt einen kreissektorförmigen Sonnenfächer, der Balkone vor Sonne, Wind und neugierigen Blicken schützen soll. Zwei Stäbe zwischen den Punkten  $D$  und  $B$  sowie zwischen den Punkten  $E$  und  $B$  teilen den Sonnenfächer in drei kongruente Teilspektoren.

Es gilt:  $\overline{BC} = 110,0$  cm;  $b = 201,6$  cm ist die Länge des Bogens  $\widehat{CA}$ ;  $D \in \widehat{CA}$ ;  $E \in \widehat{CA}$ .

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



## Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß  $\beta$  des Winkels  $\angle CBA$ . Zeichnen Sie den Kreissektor  $BCA$  mit dem Mittelpunkt  $B$  und dem Radius  $\overline{BC}$  sowie die Strecken  $[DB]$ ,  $[EB]$  und  $[AC]$  im Maßstab 1 : 10.

[Ergebnis:  $\beta = 105,0^\circ$ ]

## Lösung zu Aufgabe B2.1

## Winkel bestimmen

Gegeben:  $\overline{BC} = 110,0$  cm;  $b = 201,6$  cm (Länge des Bogens  $\widehat{CA}$ )

Gesucht:  $\beta = \angle CBA$

Erläuterung: *Bogenlänge*

Die Länge  $b$  eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel  $\alpha$  und dem Radius  $r$  lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

Es gilt:

$$b = \pi \cdot \overline{BC} \cdot \frac{\beta}{180^\circ}$$

$$201,6 = \pi \cdot 110,0 \cdot \frac{\beta}{180^\circ} \quad | \quad : 110\pi$$

$$\frac{201,6}{110\pi} = \frac{\beta}{180^\circ} \quad | \quad \cdot 180^\circ$$

$$\beta = \frac{201,6}{110\pi} \cdot 180^\circ$$

$$\beta \approx 105,0^\circ$$

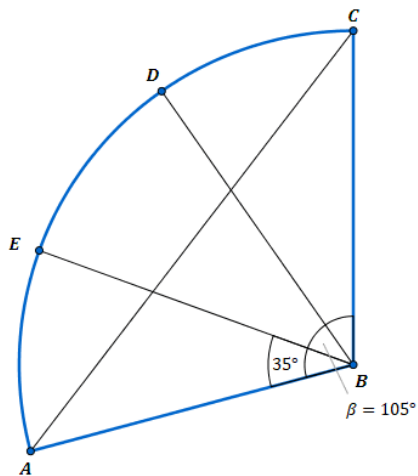
## Skizze

Kreissektor  $BCA$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Beachte den Maßstab 1 : 10!

- 1)  $\overline{BC} = 11$  cm einzeichnen
- 2) Winkel  $\beta$  beim Scheitelpunkt  $B$  antragen
- 3) Kreisbogen um  $B$  mit dem Radius 11 cm schneidet den Schenkel des Winkels  $\beta$  in  $A$
- 4) 3 kongruente Teilsektoren bedeutet, dass jeder Teilsektor den Mittelpunktswinkel  $\frac{105^\circ}{3} = 35^\circ$  besitzt
- 5) Strecken  $[DB]$ ,  $[EB]$  und  $[AC]$  einzeichnen



### Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Um die Stabilität des Sonnenfächers zu erhöhen, wird zwischen den Punkten  $A$  und  $C$

eine Stange eingezogen, die um 5% kürzer ist als die Strecke  $[AC]$ .  
Bestimmen Sie rechnerisch die Länge  $l$  dieser Stange.

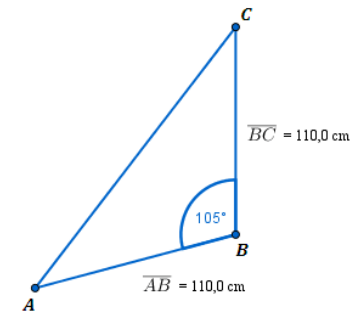
### Lösung zu Aufgabe B2.2

#### Länge einer Strecke

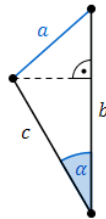
Gegeben:  $\overline{BC} = \overline{AB} = 110,0$  cm,  $\beta = 105,0^\circ$

Gesucht:  $\overline{AC}$

Man betrachtet das Dreieck  $ABC$ .



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten  $b$  und  $a$  und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel  $\alpha$  gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Es gilt:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta$$

$$\overline{AC}^2 = 110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105^\circ$$

$$\overline{AC} = \sqrt{110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105^\circ}$$

$$\overline{AC} \approx 174,5 \text{ cm}$$

Der Länge  $l$  der Stange ist um 5% kürzer als  $\overline{AC}$ .

$$\Rightarrow l \text{ entspricht } 95\% \text{ von } \overline{AC}.$$

$$\Rightarrow l = 0,95 \cdot \overline{AC} = 0,95 \cdot 174,5 \approx 165,8 \text{ cm}$$

### Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

An den Punkten  $B$  und  $C$  wird der Sonnenfächer an einer Mauer fest verankert.  
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Abstand  $d$  des Punktes  $A$  zu dieser Mauer gilt:  
 $d = 106,3 \text{ cm}$ .

### Lösung zu Aufgabe B2.3

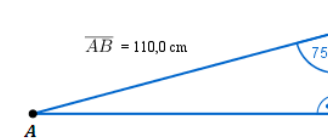
### Abstand Punkt - Gerade

Gegeben:  $\overline{AB} = 110,0 \text{ cm}$ ,  $\beta = 105,0^\circ$

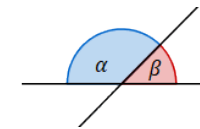
Der Abstand  $d$  des Punktes  $A$  von der Mauer ist gleich dem Abstand von  $A$  zur Geraden  $BC$ .

Ein Abstand ist immer die Länge der Lotstrecke von diesem Punkt auf die Gerade.

Man betrachtet das Dreieck  $AHB$ . Hier kann noch ein Winkel bestimmt werden.



Erläuterung: *Nebenwinkel*



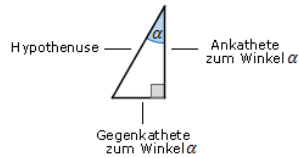
Sind  $\alpha$  und  $\beta$  Nebenwinkel, so gilt folgende Beziehung:

$$\alpha = 180^\circ - \beta$$

$$\angle ABH = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Im rechtwinkligen Dreieck  $AHB$  gilt nun:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin \angle A B H = \frac{\overline{A H}}{\overline{A B}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{d}{110}$$

$$d = 110 \cdot \sin 75^\circ \approx 106,3 \text{ cm}$$

#### Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Die Strecke  $[AC]$  schneidet die Strecke  $[DB]$  im Punkt  $G$  und die Strecke  $[EB]$  im Punkt  $F$ . Berechnen Sie die Länge der Strecke  $[GB]$  sowie den Flächeninhalt  $A_{\Delta BGF}$  des Dreiecks  $BGF$ .

[Ergebnisse:  $\overline{GB} = 70,2 \text{ cm}$ ;  $A_{\Delta BGF} = 1413,3 \text{ cm}^2$ ]

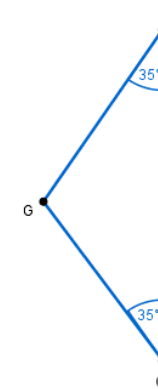
#### Lösung zu Aufgabe B2.4

##### Länge einer Strecke

Gegeben:  $\beta = 105,0^\circ$

Gesucht:  $\overline{GB}$

Man betrachtet das Dreieck  $GCB$ .



Neben dem gegebenen Winkel  $\angle C B G = \frac{\beta}{3} = 35^\circ$  kann auch der Winkel  $\angle G C B$  bestimmt werden.

Erläuterung: *Winkel berechnen*

In einem gleichschenkligen Dreieck  $ABC$  sind die beiden Basiswinkel gleich groß ( $\alpha = \beta$ ).

Von der Winkelsumme  $180^\circ$  wird zunächst der Scheitelwinkel  $\gamma$  abgezogen, wobei das doppelte Maß eines Basiswinkels ( $2\alpha$ ) übrig bleibt.

$$2\alpha = 180^\circ - \gamma \quad | \quad : 2$$

Somit erhält man die Formel für den Basiswinkel:

$$\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$\angle G C B = \frac{180^\circ - \beta}{2} \quad (\text{Basiswinkel des Dreiecks } ABC)$$

$$\angle G C B = \frac{180^\circ - 105^\circ}{2} = 37,5^\circ$$

Zuletzt ist auch der Winkel  $\angle B G C$  berechenbar.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

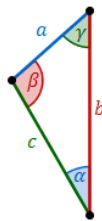
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich  $180^\circ$ .

$$\angle BGC = 180^\circ - \angle CBG - \angle GCB$$

$$\angle BGC = 180^\circ - 35^\circ - 37,5^\circ = 107,5^\circ$$

Nun sind im Dreieck  $GCB$  alle Innenwinkel und die Länge der Strecke  $[BC]$  gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BGC} &= \frac{\overline{GB}}{\sin \angle GCB} \\ \frac{110}{\sin 107,5^\circ} &= \frac{\overline{GB}}{\sin 37,5^\circ} \quad | \cdot \sin 37,5^\circ \\ \overline{GB} &= \frac{110}{\sin 107,5^\circ} \cdot \sin 37,5^\circ \approx 70,2 \text{ cm} \end{aligned}$$

### Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht:  $A_{\Delta BGF}$

Da die gesamte Figur aus kongruenten Teilspektoren besteht und symmetrisch ist, ist das Dreieck  $BGF$  gleichschenkelig mit den Maßen:

$$\angle GBF = \frac{\beta}{3} = 35^\circ, \quad \overline{GB} = \overline{FB} = 70,2 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\Delta BGF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GB} \cdot \overline{FB} \cdot \sin \angle GBF$$

$$A_{\Delta BGF} = \frac{1}{2} \cdot 70,2 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ \approx 1413,3 \text{ cm}^2$$

### Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt  $A_{CDG}$  der Figur  $CDG$ , die durch den Kreisbogen  $\widehat{CA}$  sowie die Strecken  $[DG]$  und  $[GC]$  begrenzt wird.  
[Ergebnis:  $A_{CDG} = 1481,2 \text{ cm}^2$ ]

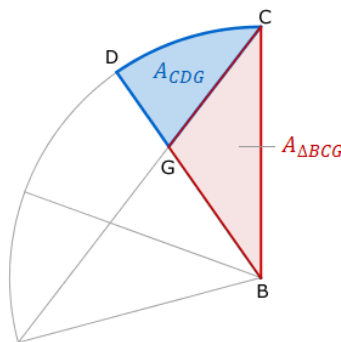
### Lösung zu Aufgabe B2.5

#### Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Gegeben:  $\overline{BC} = 110,0 \text{ cm}$ ,  $\angle CBD = 35^\circ$ ,  $\overline{GB} = 70,2 \text{ cm}$

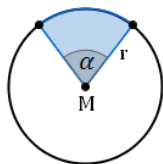
Ansatz:

$$A_{CDG} = A_{\text{Sektor } BCD} - A_{\Delta BCG}$$



Berechnung  $A_{\text{Sektor } BCD}$ :

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt  $A$  eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$  ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$  gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Sektor } BCD} = \overline{BC}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\angle CBD}{360^\circ} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ}$$

Berechnung  $A_{\Delta BCG}$ :

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck  $ABC$  zwei Seiten  $a$  und  $b$  und der Winkel  $\alpha$ , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt  $A$  des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

$$A_{\Delta BCG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{GB} \cdot \sin \angle CBD = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ$$

$$A_{CDG} = A_{\text{Sektor } BCD} - A_{\Delta BCG}$$

$$A_{CDG} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ$$

$$A_{CDG} \approx 1481,2 \text{ cm}^2$$

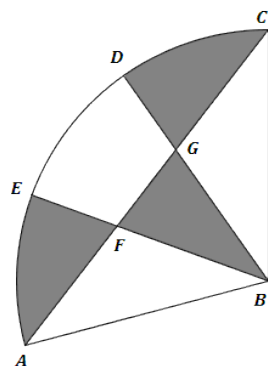
#### Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Sonnenfächer soll zweifarbig gestaltet werden. Dazu werden die Flächen der Figur  $CDG$ , der Figur  $EAF$  und des Dreiecks  $BGF$  entsprechend der Skizze dunkel abgesetzt.

Zeigen Sie rechnerisch, dass der helle Teil um mehr als 40% größer ist als der dunkle Teil.

#### Lösung zu Aufgabe B2.6

##### Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Gegeben:  $A_{CDG} = 1481,2 \text{ cm}^2$ ,  $A_{\Delta BGF} = 1413,3 \text{ cm}^2$ ,  $\overline{BC} = 110,0 \text{ cm}$ ,  $\beta = 105^\circ$

Zuerst wird die Summe der dunklen Flächen berechnet:

$$A_{\text{dunkel}} = A_{CDG} + A_{EAF} + A_{\Delta BGF}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt*

Wegen den kongruenten Teilsektoren und der Symmetrie gilt außerdem:

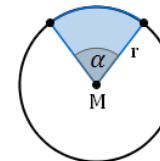
$$A_{CDG} = A_{EAF}$$

$$A_{\text{dunkel}} = 1481,2 + 1481,2 + 1413,3 = 4375,7 \text{ cm}^2$$

Berechnung der hellen Gesamtfläche:

$$A_{\text{hell}} = A_{\text{Sektor } BCA} - A_{\text{dunkel}}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt  $A$  eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$  ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$  gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{hell}} = \overline{BC}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\beta}{360^\circ} - A_{\text{dunkel}}$$

$$A_{\text{hell}} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{105^\circ}{360^\circ} - 4375,7 \approx 6911,5 \text{ cm}^2$$

Größenvergleich:

40% des dunklen Teils:

$$0,4 \cdot A_{\text{dunkel}} = 0,4 \cdot 4375,7 = 1750,3 \text{ cm}^2$$

Erhöhung des dunklen Teils um 40%:

$$4375,7 + 1750,3 = 6126,0 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow 6126,0 < 6911,5(A_{\text{hell}})$$

Also ein Erhöhung um mehr als 40%