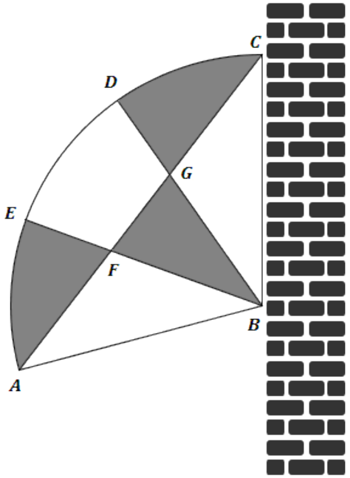
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Nebenstehende Skizze zeigt einen kreissektorförmigen Sonnenfächer, der Balkone vor Sonne, Wind und neugierigen Blicken schützen soll. Zwei Stäbe zwischen den Punkten D und B sowie zwischen den Punkten E und B teilen den Sonnenfächer in drei kongruente Teilsektoren.

Es gilt: $\overline{BC} = 110,0$ cm; $b = 201,6$ cm ist die Länge des Bogens $\overset{\frown}{CA}$; $D \in \overset{\frown}{CA}$; $E \in \overset{\frown}{CA}$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels $\measuredangle CBA$. Zeichnen Sie den Kreissektor BCA mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ sowie die Strecken $[DB]$, $[EB]$ und $[AC]$ im Maßstab $1:10$.
[Ergebnis: $\beta = 105,0°$]

Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Um die Stabilität des Sonnenfächers zu erhöhen, wird zwischen den Punkten A und C eine Stange eingezogen, die um 5% kürzer ist als die Strecke $[AC]$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Länge l dieser Stange.

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

An den Punkten B und C wird der Sonnenfächer an einer Mauer fest verankert.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Abstand d des Punktes A zu dieser Mauer gilt: $d = 106,3$ cm.

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Die Strecke $[AC]$ schneidet die Strecke $[DB]$ im Punkt G und die Strecke $[EB]$ im Punkt F. Berechnen Sie die Länge der Strecke $[GB]$ sowie den Flächeninhalt $A_{\Delta BGF}$ des Dreiecks BGF.
[Ergebnisse: $\overline{GB} = 70,2$ cm; $A_{\Delta BGF} = 1413,3$ cm]

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt A_{CDG} der Figur CDG, die durch den Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ sowie die Strecken $[DG]$ und $[GC]$ begrenzt wird.
[Ergebnis: $A_{CDG} = 1481,2$ cm^2]

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Sonnenfächer soll zweifarbig gestaltet werden. Dazu werden die Flächen der Figur CDG, der Figur EAF und des Dreiecks BGF entsprechend der Skizze dunkel abgesetzt.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der helle Teil um mehr als 40% größer ist als der dunkle Teil.

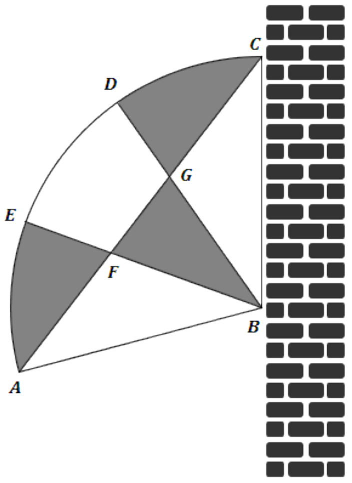
Lösung

Aufgabe B2.

Nebenstehende Skizze zeigt einen kreissektorförmigen Sonnenfächer, der Balkone vor Sonne, Wind und neugierigen Blicken schützen soll. Zwei Stäbe zwischen den Punkten D und B sowie zwischen den Punkten E und B teilen den Sonnenfächer in drei kongruente Teilsektoren.

Es gilt: $\overline{BC} = 110,0$ cm; $b = 201,6$ cm ist die Länge des Bogens $\overset{\frown}{CA}$; $D \in \overset{\frown}{CA}$; $E \in \overset{\frown}{CA}$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.



Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels $\measuredangle CBA$. Zeichnen Sie den Kreissektor BCA mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{BC}$ sowie die Strecken $[DB]$, $[EB]$ und $[AC]$ im Maßstab $1:10$.
[Ergebnis: $\beta = 105,0°$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Winkel bestimmen

Gegeben: $\overline{BC} = 110,0$ cm; $b = 201,6$ cm (Länge des Bogens $\overset{\frown}{CA}$)

Gesucht: $\beta = \measuredangle CBA$

> Erläuterung: *Bogenlänge*
>
> Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r lässt sich durch folgende Formel berechnen:
>
> $$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}$$

Es gilt:

$$b = \pi \cdot \overline{BC} \cdot \frac{\beta}{180°}$$

$$201,6 = \pi \cdot 110,0 \cdot \frac{\beta}{180°} \quad | \quad : 110\pi$$

$$\frac{201,6}{110\pi} = \frac{\beta}{180°} \quad | \quad \cdot 180°$$

$$\beta = \frac{201,6}{110\pi} \cdot 180°$$

$$\beta \approx 105,0°$$

Skizze

Kreissektor BCA einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

Beachte den Maßstab 1 : 10!

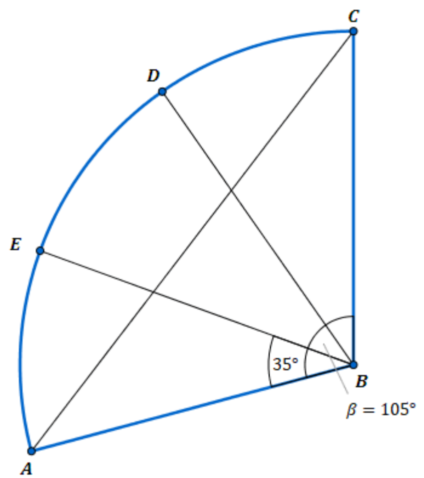
1) $\overline{BC} = 11$ cm einzeichnen

2) Winkel β beim Scheitelpunkt B antragen

3) Kreisbogen um B mit dem Radius 11 cm schneidet den Schenkel des Winkels β in A

4) 3 kongruente Teilsektoren bedeutet, dass jeder Teilsektor den Mittelpunktswinkel $\dfrac{105^\circ}{3} = 35^\circ$ besitzt

5) Strecken $[DB]$, $[EB]$ und $[AC]$ einzeichnen



Aufgabe B2.2 (2 Punkte)

Um die Stabilität des Sonnenfächers zu erhöhen, wird zwischen den Punkten A und C

eine Stange eingezogen, die um 5% kürzer ist als die Strecke $[AC]$. Bestimmen Sie rechnerisch die Länge l dieser Stange.

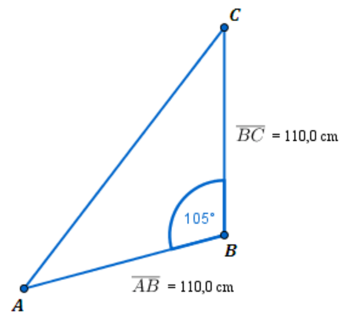
Lösung zu Aufgabe B2.2

Länge einer Strecke

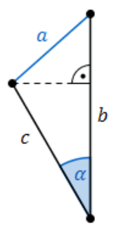
Gegeben: $\overline{BC} = \overline{AB} = 110,0$ cm, $\beta = 105,0^\circ$

Gesucht: $\overline{AC}$

Man betrachtet das Dreieck ABC.



Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und a und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

Es gilt:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\beta$

$\overline{AC}^2 = 110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105°$

$\overline{AC} = \sqrt{110^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot 110 \cdot \cos 105°}$

$\overline{AC} \approx 174,5$ cm

Der Länge l der Stange ist um 5% kürzer als $\overline{AC}$.

$\Rightarrow$ l entspricht 95% von $\overline{AC}$.

$\Rightarrow$ $l = 0,95 \cdot \overline{AC} = 0,95 \cdot 174,5 \approx 165,8$ cm

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

An den Punkten B und C wird der Sonnenfächer an einer Mauer fest verankert. Zeigen Sie durch Rechnung, dass für den Abstand d des Punktes A zu dieser Mauer gilt: $d = 106,3$ cm.

[Lösung zu Aufgabe B2.3]

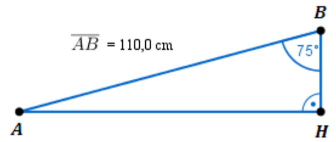
Abstand Punkt - Gerade

Gegeben: $\overline{AB} = 110,0$ cm, $\beta = 105,0°$

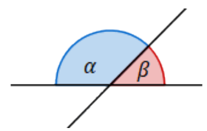
Der Abstand d des Punktes A von der Mauer ist gleich dem Abstand von A zur Geraden BC.

Ein Abstand ist immer die Länge der Lotstrecke von diesem Punkt auf die Gerade.

Man betrachtet das Dreieck AHB. Hier kann noch ein Winkel bestimmt werden.



Erläuterung: *Nebenwinkel*



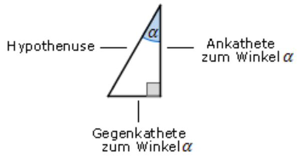
Sind α und β Nebenwinkel, so gilt folgende Beziehung:

$\alpha = 180° - \beta$

$\measuredangle ABH = 180° - \beta = 180° - 105° = 75°$

Im rechtwinkligen Dreieck AHB gilt nun:

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypothenuse } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\measuredangle A\,B\,H = \frac{\overline{A\,H}}{\overline{A\,B}}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{d}{110}$$

$$d = 110 \cdot \sin 75^\circ \approx 106,3 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.4 (4 Punkte)

Die Strecke $[A\,C]$ schneidet die Strecke $[D\,B]$ im Punkt G und die Strecke $[E\,B]$ im Punkt F. Berechnen Sie die Länge der Strecke $[G\,B]$ sowie den Flächeninhalt $A_{\Delta\,B\,G\,F}$ des Dreiecks $B\,G\,F$.
[Ergebnisse: $\overline{G\,B} = 70,2$ cm; $A_{\Delta\,B\,G\,F} = 1413,3$ cm]

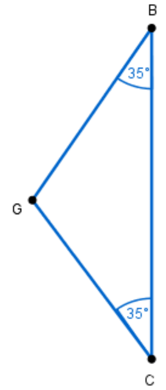
Lösung zu Aufgabe B2.4

Länge einer Strecke

Gegeben: $\beta = 105,0^\circ$

Gesucht: $\overline{G\,B}$

Man betrachtet das Dreieck $G\,C\,B$.



Neben dem gegebenen Winkel $\measuredangle C\,B\,G = \frac{\beta}{3} = 35^\circ$ kann auch der Winkel $\measuredangle G\,C\,B$ bestimmt werden.

Erläuterung: *Winkel berechnen*

In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sind die beiden Basiswinkel gleich groß ($\alpha = \beta$).

Von der Winkelsumme 180° wird zunächst der Scheitelwinkel γ abgezogen, wobei das doppelte Maß eines Basiswinkels (2α) übrig bleibt.

$$2\alpha = 180^\circ - \gamma \quad | \quad :2$$

Somit erhält man die Formel für den Basiswinkel:

$$\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2}$$

$$\measuredangle G\,C\,B = \frac{180^\circ - \beta}{2} \qquad \text{(Basiswinkel des Dreiecks } A\,B\,C)$$

$$\measuredangle G\,C\,B = \frac{180^\circ - 105^\circ}{2} = 37,5^\circ$$

Zuletzt ist auch der Winkel $\measuredangle B\,G\,C$ berechenbar.

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

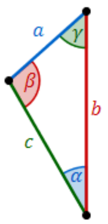
Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\measuredangle BGC = 180° - \measuredangle CBG - \measuredangle GCB$

$\measuredangle BGC = 180° - 35° - 37{,}5° = 107{,}5°$

Nun sind im Dreieck GCB alle Innenwinkel und die Länge der Strecke $[BC]$ gegeben.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Es gilt:

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\measuredangle BGC} = \frac{\overline{GB}}{\sin\measuredangle GCB}$$

$$\frac{110}{\sin 107{,}5°} = \frac{\overline{GB}}{\sin 37{,}5°} \qquad | \quad \cdot \sin 37{,}5°$$

$$\overline{GB} = \frac{110}{\sin 107{,}5°} \cdot \sin 37{,}5° \approx 70{,}2 \text{ cm}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gesucht: $A_{\Delta\, BGF}$

Da die gesamte Figur aus kongruenten Teilsektoren besteht und symmetrisch ist, ist das Dreieck $_{BGF}$ gleichschenklig mit den Maßen:

$$\measuredangle GBF = \frac{\beta}{3} = 35°, \qquad \overline{GB} = \overline{FB} = 70{,}2 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A_{\Delta\, BGF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GB} \cdot \overline{FB} \cdot \sin\measuredangle GBF$$

$$A_{\Delta\, BGF} = \frac{1}{2} \cdot 70{,}2 \cdot 70{,}2 \cdot \sin 35° \approx 1413{,}3 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.5 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt A_{CDG} der Figur CDG, die durch den Kreisbogen $\overset{\frown}{CA}$ sowie die Strecken $[DG]$ und $[GC]$ begrenzt wird.
[Ergebnis: $A_{CDG} = 1481{,}2 \text{ cm}^2$]

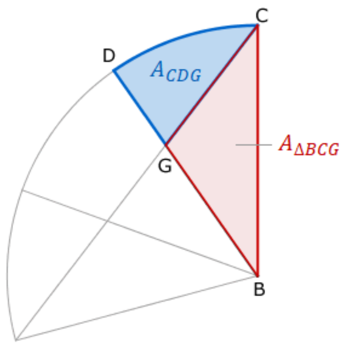
Lösung zu Aufgabe B2.5

Flächeninhalt einer geometrischen Figur

Gegeben: $\overline{BC} = 110{,}0$ cm, $\measuredangle CBD = 35°$, $\overline{GB} = 70{,}2$ cm

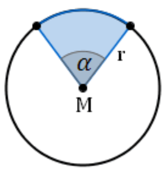
Ansatz:

$$A_{CDG} = A_{\text{Sektor } BCD} - A_{\Delta\, BCG}$$



Berechnung $A_{\text{Sektor } BCD}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360^\circ}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$$A_{\text{Sektor } BCD} = \overline{BC}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\measuredangle CBD}{360^\circ} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ}$$

Berchnung $A_{\Delta BCG}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Sind in einem beliebigem Dreieck $_{ABC}$ zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A_{\Delta BCG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{GB} \cdot \sin\measuredangle CBD = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ$$

$$A_{CDG} = A_{\text{Sektor } BCD} - A_{\Delta BCG}$$

$$A_{CDG} = 110^2 \cdot \pi \cdot \frac{35^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot 70,2 \cdot \sin 35^\circ$$

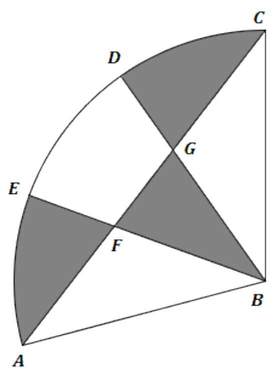
$$A_{CDG} \approx 1481,2 \text{ cm}^2$$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Der Sonnenfächer soll zweifarbig gestaltet werden. Dazu werden die Flächen der Figur CDG, der Figur EAF und des Dreiecks BGF entsprechend der Skizze dunkel abgesetzt.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der helle Teil um mehr als 40% größer ist als der dunkle Teil.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Flächeninhalt einer geometrischen Figur



Gegeben: $A_{C\,D\,G} = 1481,2\ \text{cm}^2,\ A_{\Delta\,B\,G\,F} = 1413,3\ \text{cm}^2,\ \overline{B\,C} = 110,0\ \text{cm},\ \beta = 105°$

Zuerst wird die Summe der dunklen Flächen berechnet:

$A_{\text{dunkel}} = A_{C\,D\,G} + A_{E\,A\,F} + A_{\Delta\,B\,G\,F}$

Erläuterung: *Flächeninhalt*

Wegen den kongruenten Teilsektoren und der Symmetrie gilt außerdem:

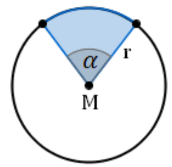
$A_{C\,D\,G} = A_{E\,A\,F}$

$A_{\text{dunkel}} = 1481,2 + 1481,2 + 1413,3 = 4375,7\ \text{cm}^2$

Berechnung der hellen Gesamtfläche:

$A_{\text{hell}} = A_{\text{Sektor}\ B\,C\,A} - A_{\text{dunkel}}$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$A = r^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{\alpha}{360°}$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\dfrac{\alpha}{360°}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an.

$A_{\text{hell}} = \overline{B\,C}^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{\beta}{360°} - A_{\text{dunkel}}$

$A_{\text{hell}} = 110^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{105°}{360°} - 4375,7 \approx 6911,5\ \text{cm}^2$

Größenvergleich:

40% des dunklen Teils:

$0,4 \cdot A_{\text{dunkel}} = 0,4 \cdot 4375,7 = 1750,3\ \text{cm}^2$

Erhöhung des dunklen Teils um 40%:

$4375,7 + 1750,3 = 6126,0\ \text{cm}^2$

$\Rightarrow \quad 6126,0 < 6911,5 (A_{\text{hell}})$
Also ein Erhöhung um mehr als 40%