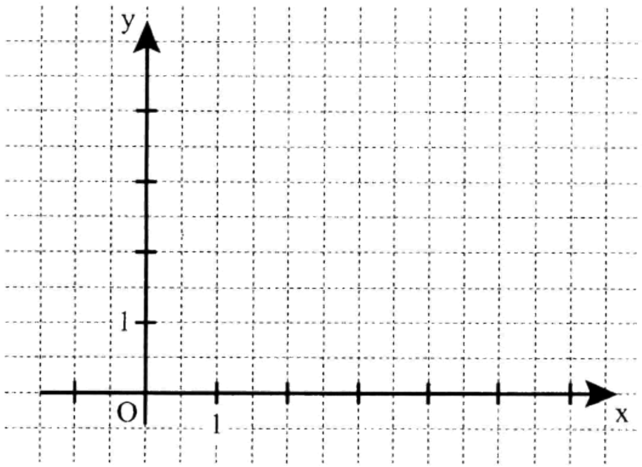
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Die Punkte $A(2|0)$, $B(5|3)$ und C bilden das gleichseitige Dreieck $A\,B\,C$.



Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B\,C$ in das Koordinatensystem zu 1.0 ein.

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Der Punkt B kann auf den Punkt C abgebildet werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

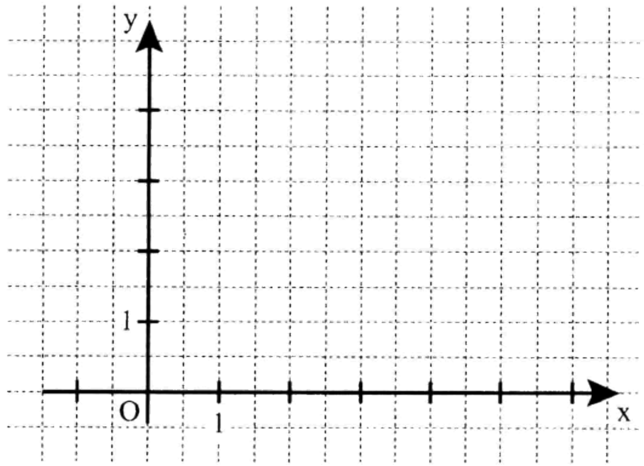
Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks $A\,B\,C$. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A1.

Die Punkte $A(2|0)$, $B(5|3)$ und C bilden das gleichseitige Dreieck $A\,B\,C$.



Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B\,C$ in das Koordinatensystem zu 1.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze

$A(2|0)$, $B(5|3)$

Erläuterung: *Einzeichnen*

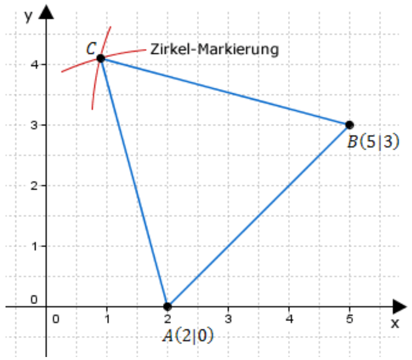
Vorgehensweise für das Einzeichnen:

1. Punkte A und B einzeichnen.

2. Punkte zu der Strecke $[AB]$ verbinden.

3. Mit dem Zirkel einen Bogen mit dem Radius $\overline{AB}$ jeweils um A und B zeichnen. Der Schnittpunkt der Bögen ist der Punkt C.

Bemerkung: Man wählt als Radius die Länge $\overline{AB}$, da das Dreieck ABC gleichseitig sein soll. Wegen dem Umlaufsinn, liegt der Punkt C oberhalb von $[AB]$.

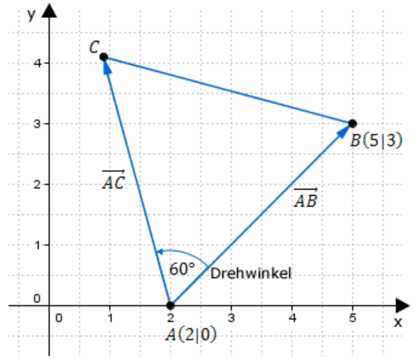


Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Der Punkt B kann auf den Punkt C abgebildet werden. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Drehung



$A(2|0)$, $B(5|3)$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC}$ bestimmen:

Erläuterung: *Drehmatrix*

$\overrightarrow{AC}$ erhält man durch Drehung von $\overrightarrow{AB}$ um A mit dem Drehwinkel $\alpha = 60°$ (das Dreieck ABC ist gleichseitig, also gleichwinklig).

Ist α der Drehwinkel einer Drehung um den Ursprung, so lautet die entsprechende Drehmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Hier wird um das Drehzentrum A gedreht, welches dann anschließend noch aufaddiert werden muss.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5\sqrt{3} \\ 0,5\sqrt{3} & 0,5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1,5 - 1,5\sqrt{3} \\ 1,5\sqrt{3} + 1,5 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{AC}}$$

Punkt C bestimmen:

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

$\overrightarrow{C} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A}$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 - 1,5\sqrt{3} \\ 1,5\sqrt{3} + 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 - 1,5\sqrt{3} \\ 1,5\sqrt{3} + 1,5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad C(0,9|4,1)$

Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC. Runden Sie auf eine Stelle nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Flächeninhalt eines Dreiecks

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Seitenlänge des Dreiecks ABC bestimmen:

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

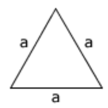
Die Länge $\overline{a}$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$\overline{a} = |\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Flächeninhalt A bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks*



Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ist gegeben durch (siehe dazu die Formelsammlung):

$A = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$

$$A = \frac{1}{4} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 4,5\sqrt{3}$$

$A = 7,8$ FE (Flächeneinheiten)