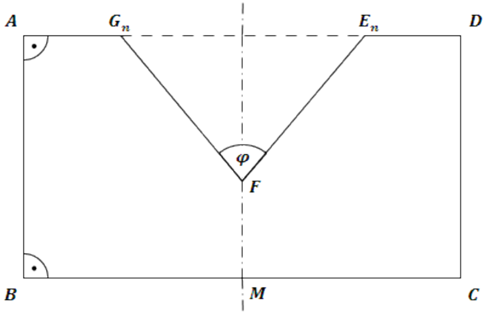
Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Die Axialschnitte von Rotationskörpern sind achsensymmetrische Siebenecke $ABCDE_nFG_n$. Der Mittelpunkt M der Seite $[BC]$ und der Punkt F liegen auf der Symmetrieachse. Punkte G_n und E_n auf der Strecke $[AD]$ legen zusammen mit dem Punkt F Winkel E_nFG_n fest. Die Winkel E_nFG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 112,62°[$.
Es gilt: $\measuredangle MBA = 90°$; $\measuredangle BAG_n = 90°$; $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 9$ cm; $\overline{MF} = 2$ cm.
Die Skizze zeigt das Siebeneck $ABCDE_1FG_1$ für $\varphi = 80°$.



Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Begründen Sie durch Rechnung das Maß der oberen Intervallgrenze für φ.

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2 \frac{\varphi}{2}\right)$ cm^3.

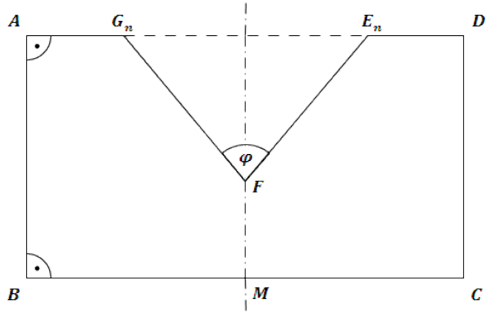
Aufgabe A3.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers für $\varphi = 100°$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung

Aufgabe A3.

Die Axialschnitte von Rotationskörpern sind achsensymmetrische Siebenecke $ABCDE_nFG_n$. Der Mittelpunkt M der Seite $[BC]$ und der Punkt F liegen auf der Symmetrieachse. Punkte G_n und E_n auf der Strecke $[AD]$ legen zusammen mit dem Punkt F Winkel E_nFG_n fest. Die Winkel E_nFG_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 112,62°[$.
Es gilt: $\measuredangle MBA = 90°$; $\measuredangle BAG_n = 90°$; $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 9$ cm; $\overline{MF} = 2$ cm.
Die Skizze zeigt das Siebeneck $ABCDE_1FG_1$ für $\varphi = 80°$.



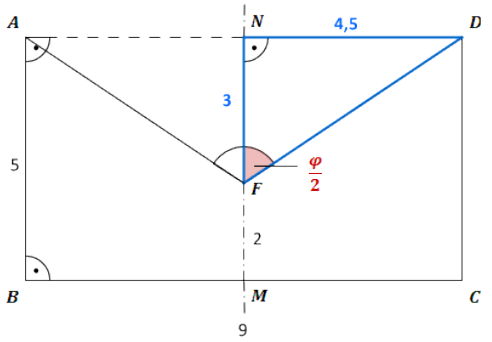
Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Begründen Sie durch Rechnung das Maß der oberen Intervallgrenze für φ.

Lösung zu Aufgabe A3.1

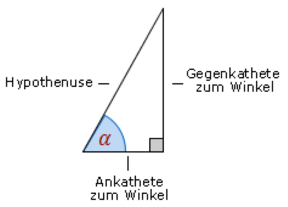
Winkel bestimmen

φ wird maximal, wenn der Punkt E_n zu D und der Punkt G_n zu A wird.



Im rechtwinkligen Dreieck $F\,D\,N$ gilt dann:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Ankathete zu }\alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{N\,D}}{\overline{N\,F}}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{4,5}{3}$$

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{4,5}{3}\right)$$

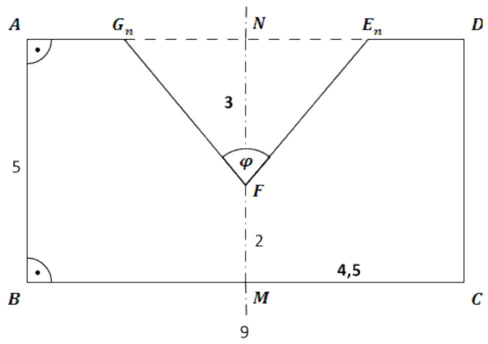
$$\varphi = 2\cdot\tan^{-1}\left(\frac{4,5}{3}\right) \approx 112,62°$$

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

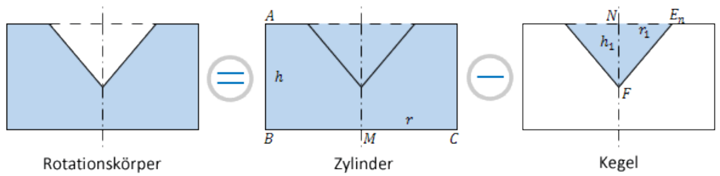
Zeigen Sie, dass für das Volumen V der Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = 9\cdot\pi\cdot\left(11,25 - \tan^2\frac{\varphi}{2}\right)$ cm^3.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

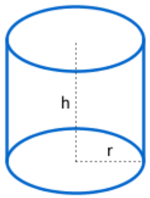


Das Volumen des Rotationskörpers berechnet sich aus der Differenz zwischen dem Volumen eines Zylinders mit Radius $r = \overline{M\,C} = 4,5$ cm und Höhe $h = \overline{A\,B} = 5$ cm und dem eines Kegels mit Radius $r_1 = \overline{N\,E_n}$ und Höhe $h_1 = \overline{N\,F} = 3$ cm.



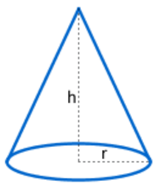
$V = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Kegel}}$

Erläuterung: *Volumen eines Zylinders, Volumen eines Kegels*



Ein Zylinder mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von:

$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

$V = \pi\, r^2\, h - \frac{1}{3}\pi\, r_1^2\, h_1$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*

Im rechtwinkligen Dreieck $N\,E_n\,F$ gilt:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{N\,E_n}}{\overline{N\,F}}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\overline{N\,E_n}}{3} \qquad |\cdot 3$$

$$\Rightarrow \quad \overline{N\,E_n} = 3\tan\frac{\varphi}{2}$$

$V = \pi \cdot (4,5)^2 \cdot 5 - \frac{1}{3}\pi \cdot \left(3\tan\frac{\varphi}{2}\right)^2 \cdot 3$

$V = \pi \cdot 101,25 - \pi \cdot 9\tan^2\frac{\varphi}{2}$

Erläuterung: *Ausklammern*

9π werden ausgeklammert.

$V = 9\pi \cdot \left(11,25 - \tan^2\frac{\varphi}{2}\right)\ \text{cm}^3$

Aufgabe A3.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers für $\varphi = 100°$. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung zu Aufgabe A3.3

Funktionswert berechnen

$V(\varphi) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2\frac{\varphi}{2}\right)$

$V(100) = 9 \cdot \pi \cdot \left(11,25 - \tan^2\frac{100}{2}\right) \approx 277,93\ \text{cm}^3$