

## Mittlere-Reife-Prüfung 2012 Mathematik I Aufgabe B1

### Aufgabe B1.

Die Gerade  $h$  mit der Gleichung  $y = \frac{4}{5}x$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) ist Symmetrieachse von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ . Die Diagonalen  $[B_n D_n]$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  liegen auf der Geraden  $h$ . Die Punkte  $A_n(x|2x + 3, 5)$  liegen auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = 2x + 3, 5$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Die Abszisse der Punkte  $D_n$  ist stets um vier größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ . Dabei gilt:  $x \in ] - 2, 92; 3, 92[$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Geraden  $g$  und  $h$  sowie die Raute  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = -0, 5$  und die Raute  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 2$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-4 \leq x \leq 8$ ;  $-3 \leq y \leq 9$ .

#### Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte  $D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:  $D_n(x + 4|0, 8x + 3, 2)$ . Bestätigen Sie sodann durch Rechnung die untere Intervallgrenze  $x = -2, 92$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .

#### Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Begründen Sie, warum sich für  $[A_n D_n] \perp h$  die obere Intervallgrenze  $x = 3, 92$  ergibt und bestätigen Sie diese durch Rechnung.

#### Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

[Ergebnis:  $C_n(2, 17x + 3, 41|0, 54x - 0, 77)$ ]

#### Aufgabe B1.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

#### Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Die Seite  $[C_3 D_3]$  der Raute  $A_3 B_3 C_3 D_3$  verläuft senkrecht zur  $x$ -Achse.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $D_3$ .

### Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

In der Raute  $A_4 B_4 C_4 D_4$  hat die Diagonale  $[A_4 C_4]$  die gleiche Länge wie die Seite  $[A_4 D_4]$ . Begründen Sie, dass für die Diagonale  $[B_4 D_4]$  gilt:  $\overline{B_4 D_4} = \overline{A_4 D_4} \cdot \sqrt{3}$ .



## Lösung

## Aufgabe B1.

Die Gerade  $h$  mit der Gleichung  $y = \frac{4}{5}x$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) ist Symmetrieachse von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ . Die Diagonalen  $[B_n D_n]$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  liegen auf der Geraden  $h$ . Die Punkte  $A_n(x|2x + 3, 5)$  liegen auf der Geraden  $g$  mit der Gleichung  $y = 2x + 3, 5$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Die Abszisse der Punkte  $D_n$  ist stets um vier größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ . Dabei gilt:  $x \in ]-2, 92; 3, 92[$ .

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

## Aufgabe B1.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Geraden  $g$  und  $h$  sowie die Raute  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = -0,5$  und die Raute  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 2$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-4 \leq x \leq 8$ ;  $-3 \leq y \leq 9$ .

Lösung zu Aufgabe B1.1**Skizze**

Gegeben:  $A_n(x|2x + 3, 5)$ ;  $x_{D_n} = x_{A_n} + 4$

Geraden  $g$  und  $h$  sowie Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  einzeichnen:

Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Gerade  $h$  einzeichnen

$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{4}{5} \rightarrow$  Auf der x-Achse 5 LE nach rechts und auf y-Achse 4 LE nach oben

2) Gerade  $g$  einzeichnen

$t = 3,5$  und  $m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{2}{1} \rightarrow$  Zum y- Achsenabschnitt  $t$  gehen, auf der x-Achse 1 LE nach rechts und auf y- Achse 4 LE nach oben

3)  $A_1(-0,5|2 \cdot (-0,5) + 3,5) = A_1(-0,5|2,5)$  einzeichnen

4)  $D_1$  für  $x = -0,5 + 4 = 3,5$  auf der Geraden  $h$  einzeichnen

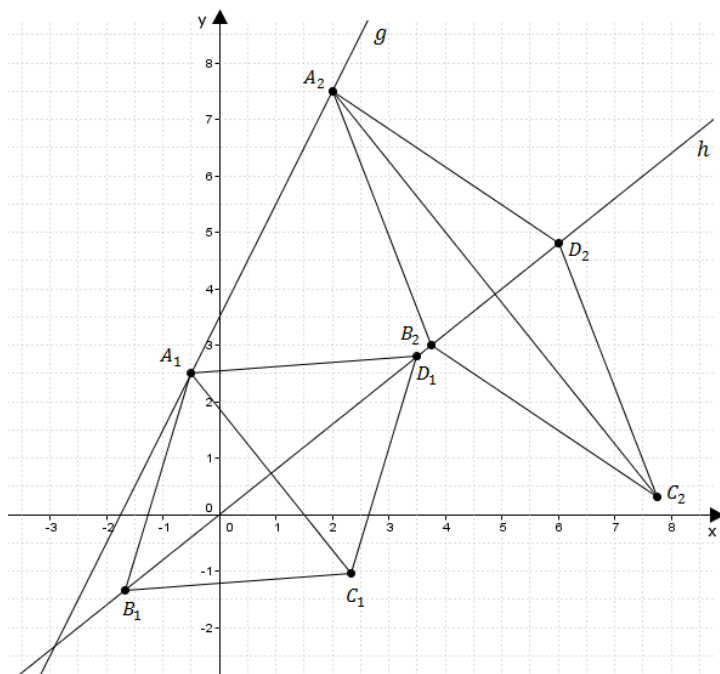
5) Es gilt:  $\overline{A_1 D_1} = \overline{A_1 B_1}$  (Raute!)

Zirkel bei  $A_1$  einstecken,  $\overline{A_1 D_1}$  abmessen und  $\overline{A_1 B_1}$  antragen ( $B_1$  liegt auf  $h$ )

6) Spiegelung von  $A_1$  an der Geraden  $h$  ergibt  $C_1$

7) Punkte zur Raute  $A_1 B_1 C_1 D_1$  verbinden

8) Raute  $A_2 B_2 C_2 D_2$  analog mit  $A_2(2|7,5)$

**Aufgabe B1.2** (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Punkte  $D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:  $D_n(x + 4 | 0,8x + 3,2)$ . Bestätigen Sie sodann durch Rechnung die untere Intervallgrenze  $x = -2,92$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .

**Lösung zu Aufgabe B1.2****Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben:

Die Abszisse der Punkte  $D_n$  ist stets um vier größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$

$$\Rightarrow x_{D_n} = x + 4$$

Punkte  $D_n$  liegen auf der Geraden  $h : y = \frac{4}{5}x$

Erläuterung: *Einsetzen*

$$x_{D_n} = x + 4 \text{ wird in } y = \frac{4}{5}x \text{ eingesetzt}$$

$$y_{D_n} = \frac{4}{5} \cdot (x + 4)$$

$$y_{D_n} = \frac{4}{5}x + \frac{16}{5} = 0,8x + 3,2$$

$$\Rightarrow D_n(x + 4 | 0,8x + 3,2)$$

**Schnitt zweier Geraden**

Gegeben:  $h : y = \frac{4}{5}x; \quad g : y = 2x + 3,5$

Erläuterung: *Eigenschaften einer Raute*

Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  existieren nur dann, wenn der Punkt  $A_n$  nicht auf dem Schnittpunkt der beiden Geraden  $g$  und  $h$  liegt.

Deshalb wird zur Bestimmung der unteren Intervallgrenze der Schnittpunkt berechnet.

Geraden  $g$  und  $h$  schneiden:

Erläuterung: *Schnitt zweier Geraden*

Schema für das Bestimmen der  $x$ -Koordinate der Schnittpunkte zweier Geraden:

1. Funktionsgleichungen gleich setzen.
2. Alle Terme mit  $x$  auf eine Seite und alle Zahlen auf die andere Seite bringen.

$$\frac{4}{5}x = 2x + 3,5 \quad | \quad -2x$$

$$-1,2x = 3,5 \quad | \quad : (-1,2)$$

$$x \approx -2,92$$

**Aufgabe B1.3** (2 Punkte)

Begründen Sie, warum sich für  $[A_n D_n] \perp h$  die obere Intervallgrenze  $x = 3,92$  ergibt und bestätigen Sie diese durch Rechnung.

Lösung zu Aufgabe B1.3**Vektor bestimmen**

Wenn  $[A_n D_n]$  senkrecht auf  $h$  steht, so fallen die Punkte  $B_n$  und  $D_n$  zusammen.

⇒ Es werden keine Rauten mehr gebildet (obere Intervallgrenze).

$$\text{Gegeben: } A_n(x|2x+3,5); \quad D_n(x+4|0,8x+3,2)$$

Bestimmung von  $\overrightarrow{A_n D_n}$ :

Erläuterung: *Richtungsvektor, Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors  $\overrightarrow{AB}$  mit den Punkten  $A(x_A|y_A)$  und  $B(x_B|y_B)$  erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

In unseren Fall gilt also:

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} x_{D_n} - x_{A_n} \\ y_{D_n} - y_{A_n} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_n D_n} = \begin{pmatrix} x+4-x \\ 0,8x+3,2-(2x+3,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,2x-0,3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gegeben: } h: y = \frac{4}{5}x = 0,8x$$

Bestimmung des Richtungsvektors  $\vec{v}$  von  $h$ :

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Der  $x$ -Wert des Richtungsvektors einer Geraden ist 1, der  $y$ -Wert des Richtungsvektors ist die Steigung der Geraden.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

Da  $[A_n D_n] \perp h$  gilt also:  $\overrightarrow{A_n D_n}$  senkrecht zu Richtungsvektor  $\vec{v}$

$$\overrightarrow{A_n D_n} \circ \vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1,2x-0,3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0,8 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$4 \cdot 1 + (-1,2x - 0,3) \cdot 0,8 = 0$$

$$4 - 0,96x - 0,24 = 0$$

$$3,76 - 0,96x = 0 \quad | \quad -3,76$$

$$-0,96x = -3,76 \quad | \quad : (-0,96)$$

$$x \approx 3,92$$

**Aufgabe B1.4** (3 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Punkte  $C_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

[Ergebnis:  $C_n(2, 17x + 3, 41|0, 54x - 0, 77)$ ]

**Lösung zu Aufgabe B1.4****Spiegelung an einer Ursprungsgeraden**

Punkte  $C_n$  entstehen durch Spiegelung der Punkte  $A_n$  an der Geraden  $h$ .

Gegeben:  $h : y = 0, 8x$

Erläuterung: *Schnittwinkel*

Für die Berechnung der Spiegelungsmatrix muss zuerst der Winkel  $\alpha$  bestimmt werden, den die Gerade  $h$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

Spiegelwinkel  $\alpha$  bestimmen:

Erläuterung: *Schnittwinkel*

Für den Winkel  $\alpha$ , den eine Gerade  $g : y = mx + t$  mit der  $x$ -Achse einschließt, gilt:

$$m = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = 0, 8$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 38, 66^\circ$$

Spiegelungsmatrix bestimmen:

Erläuterung: *Spiegelung*

Ist  $\alpha$  der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der  $x$ -Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2 \cdot 38, 66^\circ & \sin 2 \cdot 38, 66^\circ \\ \sin 2 \cdot 38, 66^\circ & -\cos 2 \cdot 38, 66^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77, 32^\circ & \sin 77, 32^\circ \\ \sin 77, 32^\circ & -\cos 77, 32^\circ \end{pmatrix}$$

Gegeben:  $A_n(x|2x + 3, 5)$

Anwenden der Spiegelungsmatrix auf die Punkte  $A_n$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77, 32^\circ & \sin 77, 32^\circ \\ \sin 77, 32^\circ & -\cos 77, 32^\circ \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3, 5 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77, 32^\circ \cdot x + \sin 77, 32^\circ \cdot (2x + 3, 5) \\ \sin 77, 32^\circ \cdot x - \cos 77, 32^\circ \cdot (2x + 3, 5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 77, 32^\circ \cdot x + 2 \sin 77, 32^\circ \cdot x + 3, 5 \cdot \sin 77, 32^\circ \\ \sin 77, 32^\circ \cdot x - 2 \cos 77, 32^\circ \cdot x - 3, 5 \cdot \cos 77, 32^\circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos 77, 32^\circ + 2 \sin 77, 32^\circ) \cdot x + 3, 5 \cdot \sin 77, 32^\circ \\ (\sin 77, 32^\circ - 2 \cos 77, 32^\circ) \cdot x - 3, 5 \cdot \cos 77, 32^\circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, 17x + 3, 41 \\ 0, 54x - 0, 77 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_n(2, 17x + 3, 41|0, 54x - 0, 77)$$

**Aufgabe B1.5** (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

**Lösung zu Aufgabe B1.5****Flächeninhalt einer Raute**

Da die Raute eine achsensymmetrische Figur ist, besteht ihre Gesamtfläche aus zwei flächengleichen Dreiecken.

Die Koordinaten der Punkte  $A_n, C_n$  und  $D_n$  sind bekannt:

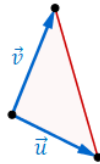
$$A_n(x|2x + 3, 5) \quad C_n(2, 17x + 3, 41|0, 54x - 0, 77) \quad D_n(x + 4|0, 8x + 3, 2)$$

Nun wird der Flächeninhalt der Dreiecke  $A_n C_n D_n$  berechnet.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Wird ein beliebiges Dreieck von den Vektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  aufgespannt, so lässt sich der Flächeninhalt mit einer Determinante berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$



Berechnung der Vektoren  $\overrightarrow{D_n A_n}$  und  $\overrightarrow{D_n C_n}$ , welche die Dreiecke  $A_n C_n D_n$  aufspannen:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Die Berechnung des Vektors  $\overrightarrow{D_n A_n}$  mit den Punkten  $A_n(x_{A_n}|y_{A_n})$  und  $D_n(x_{D_n}|y_{D_n})$  erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“:

$$\overrightarrow{D_n A_n} = \begin{pmatrix} x_{A_n} - x_{D_n} \\ y_{A_n} - y_{D_n} \end{pmatrix}$$

Analog wird der der Vektor  $\overrightarrow{D_n C_n}$  berechnet.

$$\overrightarrow{D_n A_n} = \begin{pmatrix} x - (x + 4) \\ 2x + 3, 5 - (0, 8x + 3, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1, 2x + 0, 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_n C_n} = \begin{pmatrix} 2, 17x + 3, 41 - (x + 4) \\ 0, 54x - 0, 77 - (0, 8x + 3, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 17x - 0, 59 \\ -0, 26x - 3, 97 \end{pmatrix}$$

$$A_{\Delta A_n C_n D_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1, 17x - 0, 59 \\ 1, 2x + 0, 3 & -0, 26x - 3, 97 \end{vmatrix}$$

Flächeninhalt der Raute:

$$A_{A_n B_n C_n D_n}(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1, 17x - 0, 59 \\ 1, 2x + 0, 3 & -0, 26x - 3, 97 \end{vmatrix}$$

$$A_{A_n B_n C_n D_n}(x) = \begin{vmatrix} -4 & 1, 17x - 0, 59 \\ 1, 2x + 0, 3 & -0, 26x - 3, 97 \end{vmatrix}$$

Erläuterung: *Determinante berechnen*

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

$$A_{A_n B_n C_n D_n}(x) = -4 \cdot (-0, 26x - 3, 97) - (1, 2x + 0, 3) \cdot (1, 17x - 0, 59)$$

$$A_{A_n B_n C_n D_n}(x) = 1, 04x + 15, 88 - 1, 40x^2 + 0, 71x - 0, 35x + 0, 18)$$

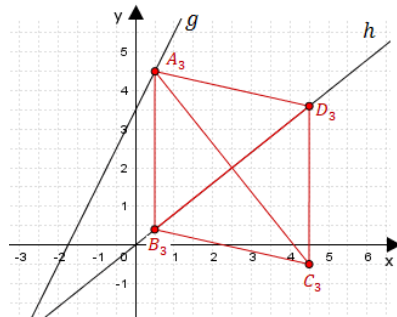
$$A_{A_n B_n C_n D_n}(x) = (-1, 4x^2 + 1, 4x + 16, 06) \text{ FE}$$

#### Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Die Seite  $[C_3 D_3]$  der Raute  $A_3 B_3 C_3 D_3$  verläuft senkrecht zur  $x$ -Achse. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $D_3$ .

#### Lösung zu Aufgabe B1.6

#### Koordinaten von Punkten ermitteln



Gegeben:  $C_n(2, 17x + 3, 41 | 0, 54x - 0, 77)$ ,  $D_n(x + 4 | 0, 8x + 3, 2)$

Wenn die Seite  $[C_3 D_3]$  senkrecht zur  $x$ -Achse verläuft, so haben die Punkte  $C_3$  und  $D_3$  den gleichen  $x$ -Wert.

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Die  $x$ -Koordinaten der Punkte  $C_n$  und  $D_n$  werden gleichgesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach  $x$  aufgelöst,

$$2, 17x + 3, 41 = x + 4 \quad | \quad -x - 3, 41$$

$$1, 17x = 0, 59 \quad | \quad : 1, 17$$

$$x = 0, 5$$

Die Abszisse der Punkte  $D_n$  ist stets um vier größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$

$$\Rightarrow x_{D_3} = 4 + 0, 5 = 4, 5$$

Nun fehlt noch die  $y$ -Koordinate von  $D_3$ .

Erläuterung: *Einsetzen*

$x = 0, 5$  wird in  $y_{D_n} = 0, 8x + 3, 2$  eingesetzt.

$$y_{D_3} = 0, 8 \cdot 0, 5 + 3, 2 = 3, 6$$

$$\Rightarrow D_3(4, 5 | 3, 6)$$

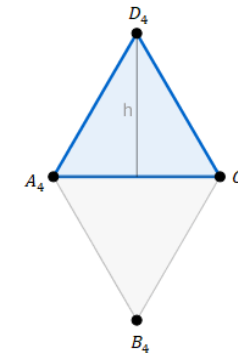
### Aufgabe B1.7 (2 Punkte)

In der Raute  $A_4 B_4 C_4 D_4$  hat die Diagonale  $[A_4 C_4]$  die gleiche Länge wie die Seite  $[A_4 D_4]$ . Begründen Sie, dass für die Diagonale  $[B_4 D_4]$  gilt:  $\overline{B_4 D_4} = \overline{A_4 D_4} \cdot \sqrt{3}$ .

### Lösung zu Aufgabe B1.7

#### Länge einer Strecke

Gegeben:



Die Diagonale  $[B_4 D_4]$  ist genau doppelt so lang wie die Höhe  $[B_4 M_4]$ .

$$\left( [B_4 M_4] = \frac{1}{2} \cdot [B_4 D_4] \right)$$

Also kommen wir über eine Berechnung der Höhe  $[B_4 M_4]$  automatisch auf die Länge von  $[B_4 D_4]$ .

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  berechnet man mit folgender Formel:

$$h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

$$[B_4 M_4] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot [A_4 D_4]$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$[B_4 M_4] = \frac{1}{2} \cdot [B_4 D_4]$  wird in die Gleichung eingesetzt.

$$\frac{1}{2} \cdot [B_4 D_4] = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot [A_4 D_4] \quad | \cdot 2$$

$$[B_4 D_4] = \sqrt{3} \cdot [A_4 D_4]$$