Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

In einer Medikamentenstudie wird in drei zeitgleich beginnenden Laborversuchen die Vermehrung von Krankheitserregern untersucht.
Bei allen Versuchen geht man von anfänglich 10 000 Krankheitserregern aus.

Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Im ersten Versuch wird festgestellt, dass sich die Anzahl der Krankheitserreger ohne Zugabe eines Medikaments täglich um 16% vergrößert.
Bestimmen Sie durch Rechnung, am wievielten Tag nach Versuchsbeginn sich die Anzahl der Krankheitserreger verdreifacht hat.

Aufgabe A1.2 (1 Punkt)

Beim zweiten Versuch wird zu Beginn ein Medikament A zugegeben. Nach Ablauf von 12 Tagen beträgt die Anzahl der Krankheitserreger 45 000. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl der Krankheitserreger mit Medikament A täglich zunimmt. Runden Sie auf ganze Prozent.

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Beim dritten Versuch wird ein Medikament B zugegeben, mit dem die Anzahl der Krankheitserreger täglich nur um 8% zunimmt. Bestimmen Sie durch Rechnung, am wievielten Tag nach Versuchsbeginn die Anzahl der Krankheitserreger mit Medikament B halb so groß ist wie die Anzahl der Krankheitserreger aus dem Versuch aus 1.1 ohne Medikament.

Lösung

Aufgabe A1.

In einer Medikamentenstudie wird in drei zeitgleich beginnenden Laborversuchen die Vermehrung von Krankheitserregern untersucht.
Bei allen Versuchen geht man von anfänglich 10 000 Krankheitserregern aus.

Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Im ersten Versuch wird festgestellt, dass sich die Anzahl der Krankheitserreger ohne Zugabe eines Medikaments täglich um 16% vergrößert.
Bestimmen Sie durch Rechnung, am wievielten Tag nach Versuchsbeginn sich die Anzahl der Krankheitserreger verdreifacht hat.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

Anfangsbestand: $y_0 = 10\,000$
Wachstumsrate: $p = 16\% = 0,16$

Gesucht:

Zeit x, bis $y = 3y_0 = 30\,000$

Erläuterung: *Änderungsrate*

Die Änderungsrate k setzt sich zusammen aus $1 + p$ bei positiven Wachstum bzw. $1 - p$ bei negativen Wachstum (Zerfall oder Abnahme), wobei p die Wachstumsrate in Prozent ist.

$k = 1 + p = 1 + 0,16 = 1,16$

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Exponentielles Wachstum*

Eine Exponentialfunktion ist allgemein gegeben durch die Form $y = y_0 \cdot k^x$.

Dabei ist y_0 der Anfangsbestand, x die Zeit und k die Änderungsrate.

$30\,000 = 10\,000 \cdot 1,16^x \quad | : 10\,000$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $1,16^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{1,16}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$3 = 1,16^x \quad |\log_{1,16}$

$x = \log_{1,16} 3$

$x \approx 7,4$

Erläuterung: *Runden*

Es wird gefragt, am wievielten Tag sich die Anzahl verdreifacht hat. Am 7. Tag ist die Anzahl noch kleiner als 30 000. Somit muss das Ergebnis auf ganze Tage aufgerundet werden.

Nach acht Tagen ist die Anzahl der Krankheitserreger erstmals mehr als dreimal so groß wie zu Beginn des Versuches.

Aufgabe A1.2 (1 Punkte)

Beim zweiten Versuch wird zu Beginn ein Medikament A zugegeben. Nach Ablauf von 12 Tagen beträgt die Anzahl der Krankheitserreger 45 000. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl der Krankheitserreger mit Medikament A täglich zunimmt. Runden Sie auf ganze Prozent.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

Zeitraum $x = 12$
Anfangsbestand $y_0 = 10\,000$
Endbestand $y = 45\,000$

Gesucht:

Wachstumsrate p_A

Erläuterung: *Exponentielles Wachstum*

Eine Exponentialfunktion ist allgemein gegeben durch die Form $y = y_0 \cdot k^x$.

Dabei ist y_0 der Anfangsbestand, x die Zeit und k die Änderungsrate.

$45\,000 = 10\,000 \cdot k_A^{12} \quad | : 10000$

Erläuterung: *n-te Wurzel*

Um den Wert der Basis a einer Potenz a^n zu erhalten wird die n-te Wurzel des Terms gezogen.

Beispiel: $a^3 = 8 \iff \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{8} \iff a = 2$

$4,5 = k_A^{12} \quad | \sqrt[12]{}$

$k_A = \sqrt[12]{4,5}$

$k_A \approx 1,1335$

Erläuterung: *Änderungsrate*

Die Änderungsrate k setzt sich zusammen aus $1 + p$ bei positiven Wachstum bzw. $1 - p$ bei negativen Wachstum (Zerfall oder Abnahme), wobei p die Wachstumsrate in Prozent ist.

$p_A = 1,1335 - 1 = 0,1335 = 13,35\%$

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Runden*

Nachdem die Lösung in ganzen Prozent angegeben werden soll wird hier gerundet.

Die Anzahl der Krankheitserreger erhöht sich jeden Tag in der Anweseheit von Medikament A um 13%.

Aufgabe A1.3 (2 Punkte)

Beim dritten Versuch wird ein Medikament B zugegeben, mit dem die Anzahl der Krankheitserreger täglich nur um 8% zunimmt. Bestimmen Sie durch Rechnung, am wievielten Tag nach Versuchsbeginn die Anzahl der Krankheitserreger mit Medikament B halb so groß ist wie die Anzahl der Krankheitserreger aus dem Versuch aus 1.1 ohne Medikament.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Exponentielles Wachstum

Gegeben:

Anfangsbestand $y_0 = 10\,000$
Wachstumsraten $p_0 = 16\% = 0,16; p_B = 8\% = 0,08$

Gesucht:

Zeit x, bis $y_B = 0,5y$

Erläuterung: *Änderungsrate*

Die Änderungsrate k setzt sich zusammen aus $1 + p$ bei positiven Wachstum bzw. $1 - p$ bei negativen Wachstum (Zerfall oder Abnahme), wobei p die Wachstumsrate in Prozent ist.

$k = 1,16; k_B = 1,08$

Erläuterung: *Exponentielles Wachstum*

Eine Exponentialfunktion ist allgemein gegeben durch die Form $y = y_0 \cdot k^x$.

Dabei ist y_0 der Anfangsbestand, x die Zeit und k die Änderungsrate.

$$10\,000 \cdot 1,08^x = \frac{1}{2} \cdot 10\,000 \cdot 1,16^x$$

$$10\,000 \cdot 1,08^x = 5\,000 \cdot 1,16^x \mid : 5\,000$$

$$2 \cdot 1,08^x = 1,16^x \quad \mid : 1,16^x$$

$$2 \cdot \frac{1,08^x}{1,16^x} = 1 \quad \mid : 2$$

Erläuterung: *Potenzregeln, 4. Potenzgesetz*

$\frac{1,08^x}{1,16^x}$ kann mit Hilfe der Potenzregel $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ umgewandelt werden.

$$\left(\frac{1,08}{1,16}\right)^x = 0,5 \mid \log_{\left(\frac{1,08}{1,16}\right)}$$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $\left(\frac{1,08}{1,16}\right)^x$ kann durch den Logarithmus $\log_{\left(\frac{1,08}{1,16}\right)}$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$$x = \log_{\left(\frac{1,08}{1,16}\right)} 0,5$$

$$x \approx 9,7$$

Erläuterung: *Runden*

Es wird gefragt, am wievielten Tag die Anzahl erstmals halb so groß ist. Am 9. Tag ist die Anzahl noch mehr als halb so groß. Somit muss das Ergebnis auf ganze Tage aufgerundet werden.

© Realschulrep.de

Nach 10 Tagen ist die Anzahl der Krankheitserreger, die Medikament B ausgesetzt sind erstmals halb so groß wie die Anzahl der Krankheitserreger in einer medikamentenfreien Umgebung.