

## Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik I Aufgabe A2

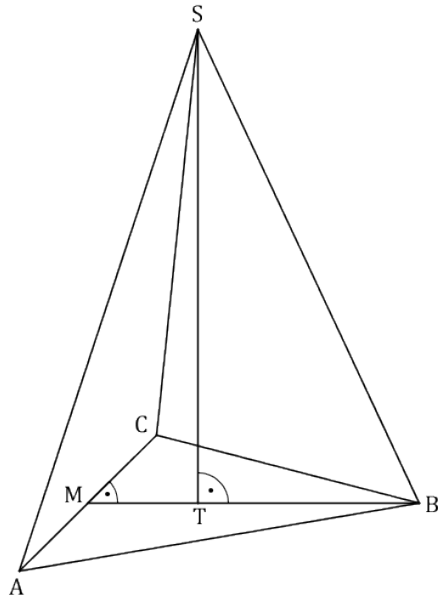
### Aufgabe A2.

Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide  $ABCS$ , deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck  $ABC$  ist. Der Fußpunkt  $T$  der Pyramidenhöhe  $[ST]$  teilt die Dreieckshöhe  $[MB]$  des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  im Verhältnis  $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$ . Es gilt:  $\overline{MB} = 6$  cm;  $\angle SBM = 65^\circ$ .

In der Zeichnung gilt:

$q = \frac{1}{2}$ ;  $\omega = 45^\circ$ ;  $[MB]$  liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



### Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie die Länge der Strecke  $[ST]$ .  
[Ergebnis:  $\overline{ST} = 8,58$  cm]

### Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Punkte  $P_n$  liegen auf der Strecke  $[BS]$ . Die Winkel  $\angle BMP_n$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in [0^\circ; 76,88^\circ]$ . Die Punkte  $P_n$  sind zusammen mit den Punkten  $A$  und  $C$  die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken  $AP_nC$  mit der Basis  $[AC]$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $AP_1C$  für  $\varphi = 20^\circ$  in das Schrägbild zu 2.0 ein.

### Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[MP_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44}{\sin(\varphi + 65^\circ)}$  cm.

### Aufgabe A2.4 (2 Punkte)

Unter den Dreiecken  $AP_nC$  hat das Dreieck  $AP_2C$  den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $AP_2C$ .

### Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

Die Punkte  $P_n$  sind für  $\varphi \in ]0^\circ; 76,88^\circ]$  Spitzen von Pyramiden  $ABCP_n$  mit den Höhen  $[P_nF_n]$ , deren Fußpunkte  $F_n$  auf  $[MB]$  liegen. Für das Volumen der Pyramide  $ABCP_3$  gilt:  $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$ . Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

## Lösung

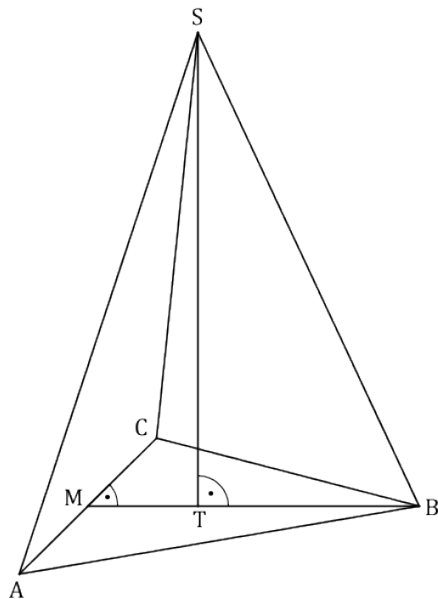
## Aufgabe A2.

Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide  $ABCS$ , deren Grundfläche das gleichseitige Dreieck  $ABC$  ist. Der Fußpunkt  $T$  der Pyramidenhöhe  $[ST]$  teilt die Dreieckshöhe  $[MB]$  des gleichseitigen Dreiecks  $ABC$  im Verhältnis  $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$ . Es gilt:  $\overline{MB} = 6$  cm;  $\angle SBM = 65^\circ$ .

In der Zeichnung gilt:

$$q = \frac{1}{2}; \omega = 45^\circ; [MB] \text{ liegt auf der Schrägbildachse.}$$

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



## Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecke  $[ST]$ .

[Ergebnis:  $\overline{ST} = 8,58$  cm]

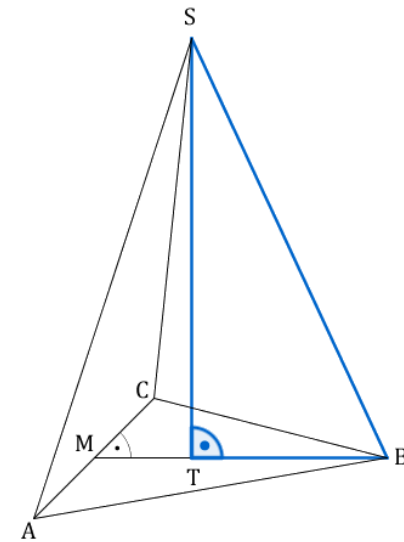
## Lösung zu Aufgabe A2.1

## Länge einer Strecke

Gegeben:  $\overline{MB} = 6$  cm;  $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$ ;  $\angle SBM = 65^\circ$

Gesucht:  $\overline{ST}$

Im Folgenden wird das Dreieck  $STB$  betrachtet.



Bestimmen der Länge von  $[TB]$ :

Erläuterung: *Erläuterung*

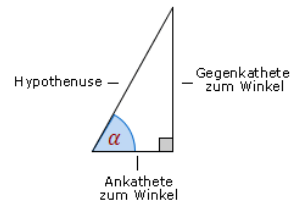
Da  $\overline{MT} : \overline{TB} = 1 : 2$  besteht die Strecke  $[MB]$  aus 3 Teilen.

Um die Länge  $\overline{TB}$  zu berechnen, werden zwei der drei Teile benötigt.

$$\overline{TB} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB} = 4 \text{ cm}$$

Bestimmen der Länge von  $[ST]$ :

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\frac{\overline{ST}}{\overline{TB}} = \tan (65^\circ)$$

$$\overline{ST} = \overline{TB} \cdot \tan (65^\circ) = \underline{8,58 \text{ cm}}$$

#### Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Punkte  $P_n$  liegen auf der Strecke  $[BS]$ . Die Winkel  $\angle BMP_n$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in [0^\circ; 76,88^\circ]$ . Die Punkte  $P_n$  sind zusammen mit den Punkten  $A$  und  $C$  die Eckpunkte von gleichschenkligen Dreiecken  $AP_nC$  mit der Basis  $[AC]$ .

Zeichnen Sie das Dreieck  $AP_1C$  für  $\varphi = 20^\circ$  in das Schrägbild zu 2.0 ein.

#### Lösung zu Aufgabe A2.2

**Skizze**

Gegeben:

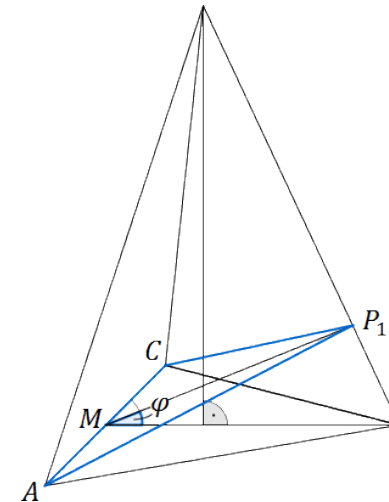
Zeichnung der Pyramide  $ABCS$  mit  $q = \frac{1}{2}$ ,  $w = 45^\circ$  und Strecke  $[MB]$  auf der Schrägbildachse.

Gefordert:

Einzeichnen des Dreiecks  $AP_1C$  mit Winkel  $\angle BMP_1 = 20^\circ$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Punkt  $P_1$  ist der Schnittpunkt der Geraden  $[MP_1]$  und  $[BS]$ .  $[MP_1]$  schließt mit der Geraden  $[MB]$  einen Winkel von  $20^\circ$  ein. Nachdem  $[MB]$  auf der Schrägbildachse liegt kann der Winkel einfach mit dem Geodreieck abgemessen und  $[MP_1]$  eingezeichnet werden.



**Aufgabe A2.3** (2 Punkte)

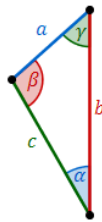
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für die Länge der Strecken  $[MP_n]$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44}{\sin(\varphi + 65^\circ)}$  cm.

**Lösung zu Aufgabe A2.3****2-dimensionale Geometrie**

Gegeben:  $\overline{MB} = 6$  cm

Zu beweisen:  $\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44}{\sin(\varphi + 65^\circ)}$  cm

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Im Dreieck  $MP_nB$  gilt somit:  $\frac{\overline{MB}}{\sin \angle MP_nB} = \frac{\overline{P_nB}}{\sin \angle B P_n M} = \frac{\overline{MP_n}}{\sin \angle P_n B M}$

Für den Winkel  $\angle MP_nB$  gilt:  $\angle MP_nB + \angle B P_n M + \angle P_n B M = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle MP_nB = 180^\circ - (\angle B P_n M + \angle P_n B M)$$

$$\Rightarrow \angle MP_nB = 180^\circ - (65^\circ + \varphi)$$

Aufgrund des Sinus-Satzes gilt:

$$\frac{\overline{MP_n}}{\sin(65^\circ)} = \frac{\overline{MB}}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]} \cdot \sin(65^\circ)$$

$$\overline{MP_n} = \frac{\overline{MB} \cdot \sin(65^\circ)}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]}$$

$$\overline{MP_n} = \frac{6 \text{ cm} \cdot 0,91}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]}$$

$$\overline{MP_n} = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin[180^\circ - (65^\circ + \varphi)]}$$

Erläuterung: *Funktionswerte der Sinusfunktion*

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\text{Hier: } \sin[180^\circ - \underbrace{(65^\circ + \varphi)}_{\alpha}] = \sin(65^\circ + \varphi)$$

$$\overline{MP_n} = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

In dem Term für  $\overline{MP_n}$  kommt die Variable  $\varphi$  vor. Somit kann  $\overline{MP_n}$  auch als Funktion von  $\varphi$  aufgefasst werden:  $\overline{MP_n} = \overline{MP_n}(\varphi)$

Somit gilt für die Länge der Strecke  $[MP_n]$  in Abhängigkeit von dem Winkel  $\varphi$ :

$$\overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

**Aufgabe A2.4** (2 Punkte)

Unter den Dreiecken  $AP_nC$  hat das Dreieck  $AP_2C$  den minimalen Flächeninhalt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $AP_2C$ .

**Lösung zu Aufgabe A2.4****Länge einer Strecke**

Gegeben:  $\overline{MB} = 6 \text{ cm}; \overline{MP_n}(\varphi) = \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$

Gesucht:  $A_{AP_2C}$ , sodass  $A_{AP_2C}$  minimal ist für alle  $A_{AP_nC}$

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe  $h$  eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $a$  berechnet man mit folgender Formel:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Länge der Kante  $[AC]$  bestimmen:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AC} = \overline{MB} \quad | \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \overline{MB}$$

$$\overline{AC} = 6,93 \text{ cm}$$

**Flächeninhalt eines Dreiecks**

Flächeninhalt  $A_{AP_nC}$  bestimmen:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$h_a$  ist die zur (Grund-)Seite  $a$  zugehörige Höhe.

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{MP_n}$$

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{MB}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5,44 \text{ cm}}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

**Extremwertproblem**

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{MB}}{\sqrt{3}} \cdot \overline{MP_n}$$

Erläuterung: *Umformung, Sinussatz*

Laut dem Sinussatz gilt:

$$\frac{\overline{MP_n}}{\sin 65^\circ} = \frac{\overline{MB}}{\sin(65^\circ + \varphi)} \quad | \cdot \sin 65^\circ$$

$$\overline{MP_n} = \frac{\overline{MB} \cdot \sin 65^\circ}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

$$A_{AP_nC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\overline{MB}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{MB} \sin(65^\circ)}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

$$A_{AP_nC} = \overline{MB}^2 \cdot \frac{\sin(65^\circ)}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sin(65^\circ + \varphi)}$$

Erläuterung: *Minimum der Funktion, Sinusfunktion*

Der Flächeninhalt ist ein Produkt. Dieses wird minimal, wenn die variablen Faktoren minimal werden.

Hier muss also der Quotient  $\frac{1}{\sin(65^\circ + \varphi)}$  den kleinstmöglichen Wert annehmen. Dies ist der Fall, wenn der Sinus im Nenner maximal wird. Der größte Wert den der Sinus annehmen kann ist 1. Dies ist der Fall für  $+90^\circ$ .

$$\frac{1}{\sin(90^\circ)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow A_{AP_2C} = \overline{MB}^2 \cdot \frac{\sin(65^\circ)}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \overline{MB}^2 \cdot \frac{\sin(65^\circ)}{\sqrt{3}}$$

$$A_{AP_2C} = 36 \text{ cm}^2 \cdot \frac{0,91}{1,73} = 36 \text{ cm}^2 \cdot 0,52$$

$$A_{AP_2C} = \underline{18,84 \text{ cm}^2}$$

**Aufgabe A2.5** (3 Punkte)

Die Punkte  $P_n$  sind für  $\varphi \in ]0^\circ; 76,88^\circ]$  Spitzen von Pyramiden  $ABCP_n$  mit den Höhen  $[P_nF_n]$ , deren Fußpunkte  $F_n$  auf  $[MB]$  liegen. Für das Volumen der Pyramide

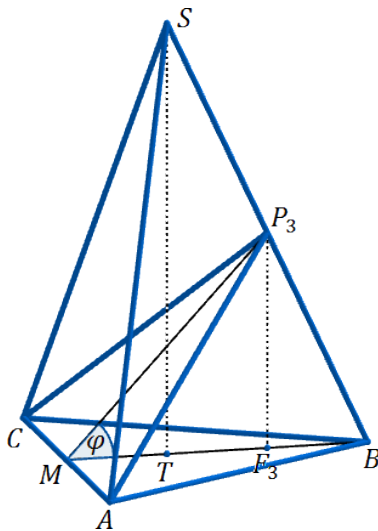
$ABCP_3$  gilt:  $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$ . Bestimmen Sie das zugehörige Winkelmaß  $\varphi$ .

### Lösung zu Aufgabe A2.5

#### Volumen einer Pyramide

Gegeben:  $V_{ABCP_3} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCS}$ ;  $\overline{ST} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB} \cdot \tan(65^\circ)$

Gesucht:  $\varphi = \angle P_3 M B$



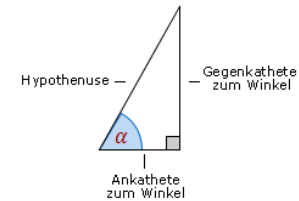
Erläuterung: *Erläuterung*

Aufgrund der identischen Grundfläche verhalten sich die Volumina der Pyramiden  $ABCS$  und  $ABCP_3$  zueinander wie die jeweiligen Höhen  $\overline{ST}$  und  $\overline{P_3 F_3}$ .

$$\overline{P_3 F_3} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ST} = \frac{\overline{MB}}{3} \cdot \tan(65^\circ)$$

$$\overline{P_3 F_3} = 4,29 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

#### Winkel bestimmen

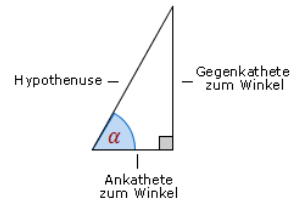
$$\frac{\overline{P_3 F_3}}{\overline{F_3 B}} = \tan(65^\circ) \quad | \cdot \frac{\overline{F_3 B}}{\tan(65^\circ)}$$

$$\overline{F_3 B} = \frac{\overline{P_3 F_3}}{\tan(65^\circ)} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MB} = 2 \text{ cm}$$

$$\overline{MB} = \overline{M F_3} + \overline{F_3 B}$$

$$\overline{M F_3} = \overline{MB} - \overline{F_3 B} = \overline{MB} - \frac{\overline{MB}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \overline{MB} = 4 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\frac{\overline{P_3 F_3}}{\overline{M F_3}} = \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\overline{P_3 F_3}}{\overline{M F_3}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} (65^\circ) \right) = 47^\circ$$