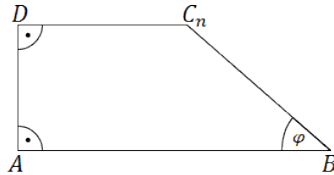


## Mittlere-Reife-Prüfung 2013 Mathematik I Aufgabe A3

### Aufgabe A3.

Die Trapeze  $ABC_nD$  (siehe Skizze) haben die parallelen Seiten  $[AB]$  und  $[C_nD]$ . Die Winkel  $C_nBA$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]21, 80^\circ; 90^\circ[$ .  
Es gilt:  $\overline{AB} = 10$  cm;  $\overline{AD} = 4$  cm;  $\angle BAD = 90^\circ$ .



#### Aufgabe A3.1 (1 Punkt)

Bestätigen Sie durch Rechnung die untere Intervallgrenze von  $\varphi$ .

#### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Trapeze  $ABC_nD$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  gilt:  $A(\varphi) = \left(40 - \frac{8}{\tan \varphi}\right) \text{ cm}^2$ .

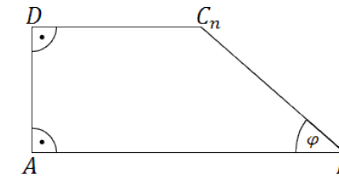
#### Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Für  $\varphi = 50^\circ$  entsteht das Trapez  $ABC_1D$ . Der Flächeninhalt des Trapezes  $ABC_2D$  ist um 30% kleiner als der Flächeninhalt des Trapezes  $ABC_1D$ . Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels  $C_2BA$  des Trapezes  $ABC_2D$ .

## Lösung

### Aufgabe A3.

Die Trapeze  $ABC_nD$  (siehe Skizze) haben die parallelen Seiten  $[AB]$  und  $[C_nD]$ . Die Winkel  $C_nBA$  haben das Maß  $\varphi$  mit  $\varphi \in ]21, 80^\circ; 90^\circ[$ .  
Es gilt:  $\overline{AB} = 10$  cm;  $\overline{AD} = 4$  cm;  $\angle BAD = 90^\circ$ .



#### Aufgabe A3.1 (1 Punkte)

Bestätigen Sie durch Rechnung die untere Intervallgrenze von  $\varphi$ .

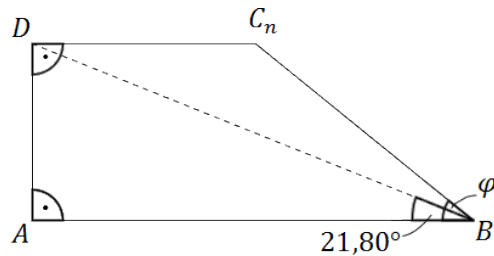
#### Lösung zu Aufgabe A3.1

#### *Abstand zweier Punkte*

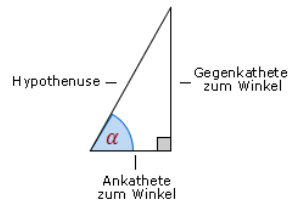
Gegeben:  $\overline{AB} = 10$  cm;  $\overline{AD} = 4$  cm;  $\angle BAD = 90^\circ$

Zu beweisen: Untere Intervallgrenze  $\varphi = 21, 80^\circ$

Das Trapez  $ABC_nD$  wird zu einem Dreieck, wenn  $C_n$  zu  $D$  wird.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \tan(\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{4 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} \right) = \tan^{-1}(0,4)$$

$$\varphi = 21,80^\circ$$

$\Rightarrow$  Für  $\varphi > 21,80^\circ$  existieren die Trapeze  $ABC_nD$ .

#### Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt  $A$  der Trapeze  $ABC_nD$  in Abhängigkeit von  $\varphi$

$$\text{gilt: } A(\varphi) = \left( 40 - \frac{8}{\tan \varphi} \right) \text{ cm}^2.$$

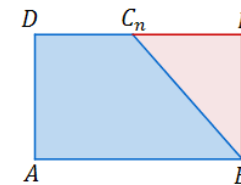
#### Lösung zu Aufgabe A3.2

##### Flächeninhalt eines Trapezes

Gegeben:  $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ ;  $\overline{AD} = 4 \text{ cm}$ ;  $\angle BAD = 90^\circ$ ;  $A_{ABC_nD} = A$

Zu beweisen:  $A(\varphi) = \left( 40 - \frac{8}{\tan(\varphi)} \right) \text{ cm}^2$

Erläuterung: *Erläuterung, Fläche eines Trapezes*



Der Flächeninhalt des Trapezes  $ABC_nD$  wird hier dargestellt als Differenz der Flächeninhalte des Rechtecks  $ABED$  minus dem Dreieck  $BEC_n$ .

$$A = A_{ABED} - A_{BEC_n}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks*

Da jedes Rechteck in zwei identische rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so ist der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks genau die Hälfte des Flächeninhalts des korrespondierenden Rechtecks:

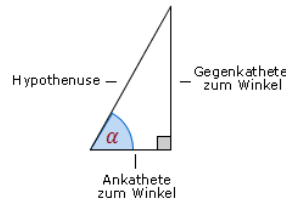
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

mit  $a, b$  als Seitenlängen des Rechtecks.

In diesem Fall ist  $a = \overline{BE} = \overline{AD}$  und  $b = \overline{EC_n}$

$$A = (\overline{AB} \cdot \overline{AD}) - \left( \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{EC_n} \right)$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels  $\alpha$  ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Die Länge der Strecke  $[EC_n]$  kann also auch dargestellt werden als  $\overline{EC_n} = \frac{\overline{AD}}{\tan(\varphi)}$ .

$$A = (\overline{AB} \cdot \overline{AD}) - \left( \frac{1}{2} \cdot \overline{AD}^2 \cdot \frac{1}{\tan(\varphi)} \right)$$

$$A = 40 \text{ cm}^2 - \frac{1}{2} \cdot 16 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{\tan(\varphi)} = 40 \text{ cm}^2 - 8 \text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{\tan(\varphi)}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Die gefundene Formel für  $A$  enthält noch die Variable  $\varphi$ . Damit kann  $A$  auch als Funktion von  $\varphi$  betrachtet werden.

$$A(\varphi) = \left( 40 - \frac{8}{\tan(\varphi)} \right) \text{ cm}^2$$

### Aufgabe A3.3 (2 Punkte)

Für  $\varphi = 50^\circ$  entsteht das Trapez  $ABC_1D$ . Der Flächeninhalt des Trapezes  $ABC_2D$  ist um 30% kleiner als der Flächeninhalt des Trapezes  $ABC_1D$ . Berechnen Sie das Maß  $\varphi$  des Winkels  $C_2BA$  des Trapezes  $ABC_2D$ .

### Lösung zu Aufgabe A3.3

**Winkel bestimmen**

Gegeben:  $A_{ABC_nD} = \left( 40 - \frac{8}{\tan(\varphi)} \right) \text{ cm}^2; \varphi_1 = 50^\circ$

Gesucht:  $\varphi_2$ , sodass  $A_{ABC_2D} = 0,7 \cdot A_{ABC_1D}$

Erläuterung: *Gleichsetzen, Erläuterung*

Um  $\varphi_2$  zu bestimmen, beginnen wir mit dem Gleichsetzen der Funktionsterme für den Flächeninhalt und lösen nach  $\varphi_2$  auf.

$$40 - \frac{8}{\tan(\varphi_2)} = 0,7 \cdot \left( 40 - \frac{8}{\tan(\varphi_1)} \right) \quad | - 40$$

$$-\frac{8}{\tan(\varphi_2)} = 28 - \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)} - 40$$

$$-\frac{8}{\tan(\varphi_2)} = -12 - \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)} \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{8}{\tan(\varphi_2)} = 12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)} \quad | \cdot \tan(\varphi_2)$$

$$8 = \tan(\varphi_2) \left[ 12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)} \right] \quad | : \left[ 12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)} \right]$$

$$\tan(\varphi_2) = \frac{8}{12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)}} \quad | \tan^{-1}$$

$$\varphi_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{8}{12 + \frac{5,6}{\tan(\varphi_1)}} \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{8}{12 + \frac{5,6}{\tan(50^\circ)}} \right] = \tan^{-1}(0,4791)$$

$$\varphi_2 = 25,60^\circ$$