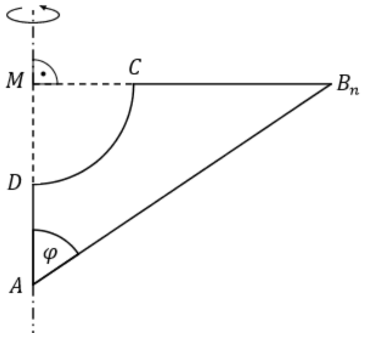
Mittlere-Reife-Prüfung 2015 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Gegeben sind rechtwinklige Dreiecke $A\,B_n\,M$ mit $\overline{A\,M} = 4$ cm und den Hypotenusen $[A\,B_n]$.
Die Winkel $B_n\,A\,M$ haben das Maß φ mit $\varphi \in\,]30°; 90°[$.
Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{M\,C} = 2$ cm schneidet die Seite $[A\,M]$ im Punkt D und die Seiten $[B_n\,M]$ im Punkt C.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A1.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie die Länge der Seite $[A\,B_1]$ für $\varphi = 54°$.

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Die Figuren $A\,B_n\,C\,D$, die durch die Strecken $[A\,D]$, $[A\,B_n]$ und $[B_n\,C]$ sowie durch den Kreisbogen $\overset{\frown}{D\,C}$ begrenzt sind, rotieren um die Gerade $A\,M$.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot \left(4\tan^2\varphi - 1\right)$ cm^3.

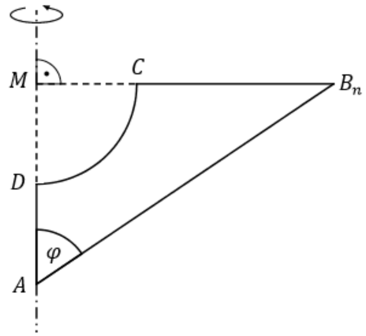
Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers für $\varphi = 54°$.

Lösung

Aufgabe A1.

Gegeben sind rechtwinklige Dreiecke $A\,B_n\,M$ mit $\overline{A\,M} = 4$ cm und den Hypotenusen $[A\,B_n]$.
Die Winkel $B_n\,A\,M$ haben das Maß φ mit $\varphi \in\,]30°; 90°[$.
Der Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = \overline{M\,C} = 2$ cm schneidet die Seite $[A\,M]$ im Punkt D und die Seiten $[B_n\,M]$ im Punkt C.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



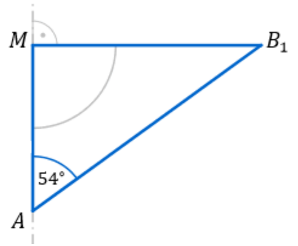
Aufgabe A1.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Seite $[A\,B_1]$ für $\varphi = 54°$.

[Lösung zu Aufgabe A1.1]

Seite eines Dreiecks bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $A\,M\,B_1$:



$$\cos\varphi = \frac{\overline{A\,M}}{\overline{A\,B_n}} \quad \Rightarrow \quad \overline{A\,B_n} = \frac{\overline{A\,M}}{\cos\varphi}$$

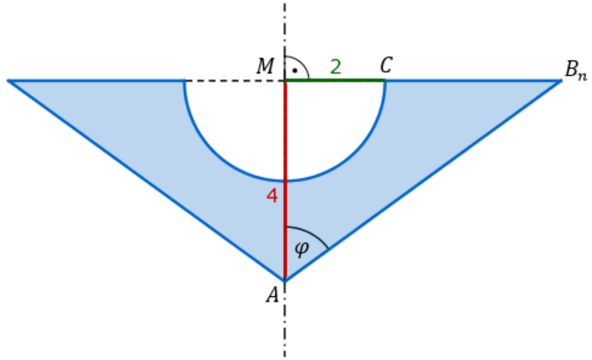
$$\overline{A\,B_1} = \frac{4}{\cos 54^\circ} \approx 6,81$$

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

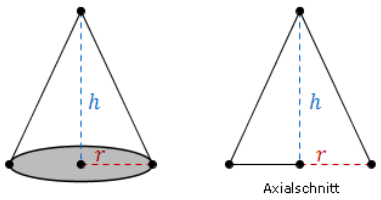
Die Figuren $A\,B_n\,C\,D$, die durch die Strecken $[A\,D]$, $[A\,B_n]$ und $[B_n\,C]$ sowie durch den Kreisbogen $\overset{\frown}{D\,C}$ begrenzt sind, rotieren um die Gerade $A\,M$.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ gilt: $V(\varphi) = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot \left(4\tan^2\varphi - 1\right)$ cm^3.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

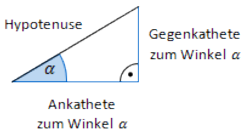
$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Radius des Kegels entsprciht der Länder der Strecke $[M\,B_n]$.

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{M\,B_n}^2 \cdot \pi \cdot 4$$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

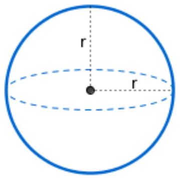
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

Zwischenrechnung: $\tan\varphi = \frac{\overline{MB_n}}{4} \quad \Rightarrow \quad \overline{MB_n} = 4\tan\varphi$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3}\cdot(4\tan\varphi)^2\cdot\pi\cdot 4 = \frac{64}{3}\cdot\pi\cdot\tan^2\varphi$$

Erläuterung: *Volumen einer Kugel*



Eine Kugel mit Radius r hat ein Volumen von:

$$V = \frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$$

$$V_{\text{Halbkugel}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi = \frac{2}{3}\cdot 2^3\cdot\pi$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = V_{\text{Kegel}} - V_{\text{Halbkugel}}$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{64}{3}\cdot\pi\cdot\tan^2\varphi - \frac{16}{3}\cdot\pi = \frac{16}{3}\pi\cdot\left(4\tan^2\varphi - 1\right)$$

$$V_{\text{Rotationskörper}} = \frac{16}{3}\pi\cdot\left(4\tan^2\varphi - 1\right)\ \text{cm}^3$$

Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers für $\varphi = 54°$.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

$\varphi = 54°$ in das Ergebnis von Teilaufgabe A1.2 einsetzen:

$$V = \frac{16}{3}\cdot\pi\cdot\left(4\tan^2 54° - 1\right) \approx 6{,}81\ \text{cm}^3$$

© Realschulrep.de