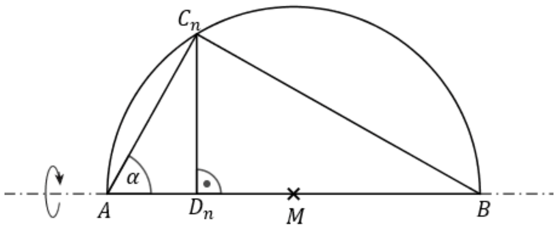
Mittlere-Reife-Prüfung 2016 Mathematik I Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Punkte C_n liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $[A\,B]$ mit dem Mittelpunkt M. Die Winkel BAC_n haben das Maß α mit $\alpha \in]0°; 90°[$. Die Punkte A, B und C_n sind die Eckpunkte von Dreiecken ABC_n. Punkte D_n sind die Fußpunkte der Lote von den Punkten C_n auf die Strecke [AB].
Es gilt: $\overline{\mathrm{AB}} = 6$ cm.



Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n]$ in Abhängigkeit von α gilt:

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}(\alpha) = 6 \cdot \cos\alpha \sin\alpha$ cm.

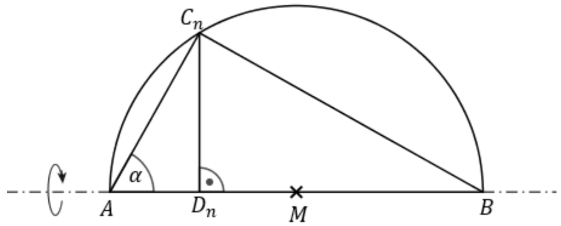
Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Die Dreiecke ABC_n rotieren um die Achse AB.
Begründen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von α gilt: $V(\alpha) = 72 \cdot \pi \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$ cm^3.
Berechnen Sie sodann für $\alpha = 30°$ das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

Lösung

Aufgabe A3.

Punkte C_n liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $[A\,B]$ mit dem Mittelpunkt M. Die Winkel BAC_n haben das Maß α mit $\alpha \in]0°; 90°[$. Die Punkte A, B und C_n sind die Eckpunkte von Dreiecken ABC_n. Punkte D_n sind die Fußpunkte der Lote von den Punkten C_n auf die Strecke [AB].
Es gilt: $\overline{\mathrm{AB}} = 6$ cm.



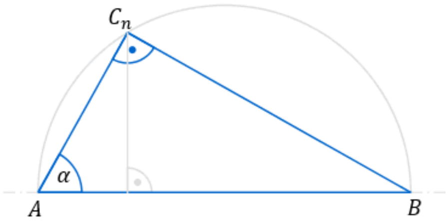
Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n]$ in Abhängigkeit von α gilt:

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}(\alpha) = 6 \cdot \cos\alpha \sin\alpha$ cm.

Lösung zu Aufgabe A3.1

Länge einer Strecke

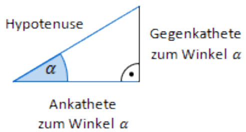


Erläuterung: *Thaleskreis*

Ein Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises, ergibt immer ein rechtwinkliges Dreieck.

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck ABC_n.

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*

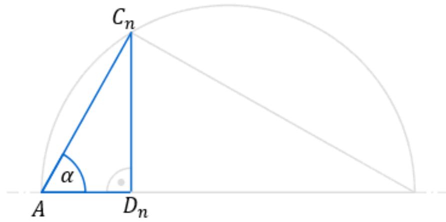


Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

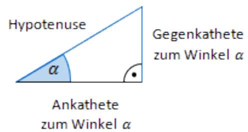
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{AC}_n}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}_n}}{6} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AC}_n} = 6 \cdot \cos\alpha$$



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $\mathrm{AD}_n\mathrm{C}_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}}{\overline{\mathrm{AC}_n}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = \overline{\mathrm{AC}_n} \cdot \sin\alpha$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Für $\overline{\mathrm{AC}_n}$ wird der berechnete Wert $6 \cdot \cos\alpha$ eingesetzt.

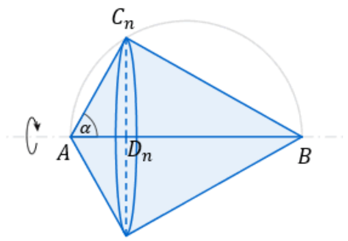
$$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = 6 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Die Dreiecke ABC_n rotieren um die Achse AB.
Begründen Sie rechnerisch, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von α gilt: $V(\alpha) = 72 \cdot \pi \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \text{ cm}^3$.
Berechnen Sie sodann für $\alpha = 30°$ das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

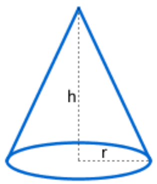
Lösung zu Aufgabe A3.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



$V = V_{\text{Kegel links}} + V_{\text{Kegel rechts}}$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{AD}_n} + \frac{1}{3} \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2$ wird aus beiden Summanden ausgeklammert.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2 \cdot \underbrace{(\overline{\mathrm{AD}_n} + \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}})}_{\overline{AB}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Aus der vorherigen Teilaufgabe ist bekannt, dass $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = 6\cos\alpha \cdot \sin\alpha$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6\cos\alpha \cdot \sin\alpha)^2 \cdot 6$$

$$V = 72 \cdot \pi \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$$