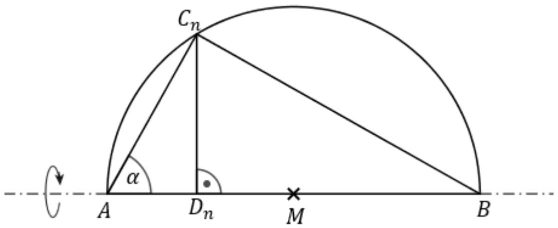
# Mittlere-Reife-Prüfung 2016 Mathematik I Aufgabe A3

**Aufgabe A3.**

Punkte $C_n$ liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $[AB]$ mit dem Mittelpunkt $M$. Die Winkel $\mathrm{BAC}_n$ haben das Maß $\alpha$ mit $\alpha \in \,]0°; 90°[$. Die Punkte $A$, $B$ und $C_n$ sind die Eckpunkte von Dreiecken $\mathrm{ABC}_n$. Punkte $D_n$ sind die Fußpunkte der Lote von den Punkten $C_n$ auf die Strecke [AB].
Es gilt: $\overline{\mathrm{AB}} = 6$ cm.




**Aufgabe A3.1** (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n]$ in Abhängigkeit von $\alpha$ gilt:

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}(\alpha) = 6 \cdot \cos\alpha \sin\alpha$ cm.

**Aufgabe A3.2** (3 Punkte)

Die Dreiecke $\mathrm{ABC}_n$ rotieren um die Achse AB.
Begründen Sie rechnerisch, dass für das Volumen $V$ der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von $\alpha$ gilt: $V(\alpha) = 72 \cdot \pi \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha \text{ cm}^3$.
Berechnen Sie sodann für $\alpha = 30°$ das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

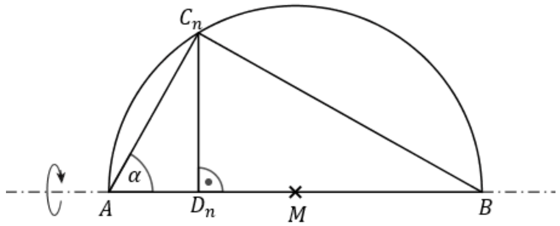




# Lösung

## Aufgabe A3.

Punkte $C_n$ liegen auf dem Thaleskreis über der Strecke $[AB]$ mit dem Mittelpunkt $M$. Die Winkel $\mathrm{BAC}_n$ haben das Maß $\alpha$ mit $\alpha \in \,]0°; 90°[$. Die Punkte $A$, $B$ und $C_n$ sind die Eckpunkte von Dreiecken $\mathrm{ABC}_n$. Punkte $D_n$ sind die Fußpunkte der Lote von den Punkten $C_n$ auf die Strecke [AB].
Es gilt: $\overline{\mathrm{AB}} = 6$ cm.



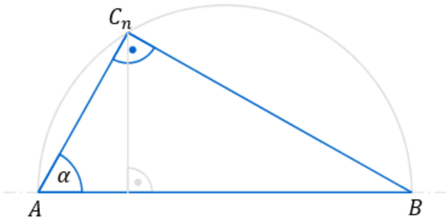

## Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n]$ in Abhängigkeit von $\alpha$ gilt:

$\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}(\alpha) = 6 \cdot \cos\alpha \sin\alpha$ cm.

## Lösung zu Aufgabe A3.1

***Länge einer Strecke***

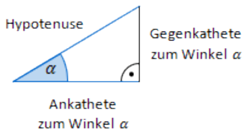



Erläuterung: *Thaleskreis*

Ein Dreieck aus den beiden Endpunkten des Durchmessers eines Halbkreises (Thaleskreis) und einem weiteren Punkt dieses Halbkreises, ergibt immer ein rechtwinkliges Dreieck.

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $ABC_n$.

Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*




Der Kosinus eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

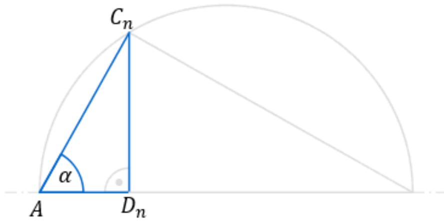
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC_n}}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AC_n} = 6 \cdot \cos\alpha$$

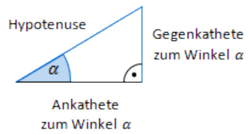







Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck $AD_nC_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*




Der Sinus eines Winkels $\alpha$ ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\alpha = \frac{\overline{C_nD_n}}{\overline{AC_n}} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{C_nD_n} = \overline{AC_n} \cdot \sin\alpha$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Für $\overline{AC_n}$ wird der berechnete Wert $6 \cdot \cos\alpha$ eingesetzt.

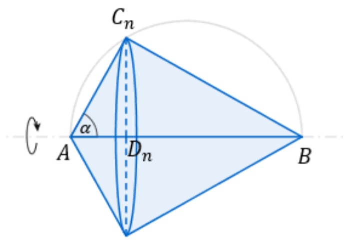
$$\overline{C_nD_n} = 6 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

**Aufgabe A3.2** (3 Punkte)

Die Dreiecke $\mathrm{ABC}_n$ rotieren um die Achse AB.
Begründen Sie rechnerisch, dass für das Volumen $V$ der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von $\alpha$ gilt: $V(\alpha) = 72 \cdot \pi \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \text{ cm}^3$.
Berechnen Sie sodann für $\alpha = 30°$ das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

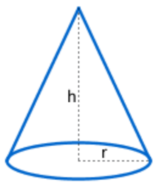
**Lösung zu Aufgabe A3.2**

***Volumen des Rotationskörpers ermitteln***




$V = V_{\text{Kegel links}} + V_{\text{Kegel rechts}}$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*




Ein Kegel mit Radius $r$ und Höhe $h$, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{AD}_n} + \frac{1}{3} \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}}$$





Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2$ wird aus beiden Summanden ausgeklammert.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}^2 \cdot \underbrace{(\overline{\mathrm{AD}_n} + \overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}})}_{\overline{AB}}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

Aus der vorherigen Teilaufgabe ist bekannt, dass $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n} = 6 \cos \alpha \cdot \sin \alpha$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6 \cos \alpha \cdot \sin \alpha)^2 \cdot 6$$

$$V = 72 \cdot \pi \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$