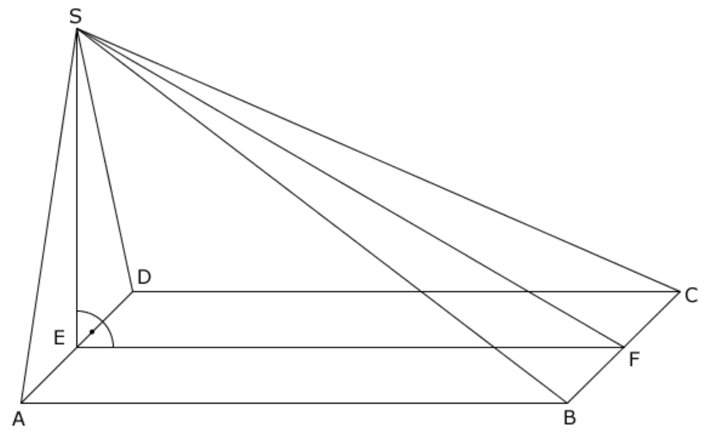
Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Das Rechteck $A\,B\,C\,D$ mit $\overline{A\,B} = 12$ cm und $\overline{B\,C} = 7$ cm ist die Grundfläche der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$ (siehe Zeichnung). Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt E der Strecke $[A\,D]$ mit $\overline{E\,S} = 7$ cm. Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke $[B\,C]$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SFE sowie die Länge der Strecke $[F\,S]$.

$\left[\text{Ergebnisse:} \quad \varphi = 30,26°; \overline{F\,S} = 13,89 \text{ cm}\right]$

Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Der Punkt P liegt auf der Strecke $[E\,F]$ mit $\overline{E\,P} = 5$ cm. Für Punkte M_n auf der Strecke $[F\,S]$ gilt: $\overline{F\,M_n}(x) = x$ cm mit $x < 13,89$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Die Punkte M_n sind die Mittelpunkte von Strecken $[Q_n\,R_n]$ mit $R_n \in [C\,S]$, $Q_n \in [B\,S]$ und $[Q_n\,R_n] \parallel [B\,C]$.
Die Punkte P, R_n und Q_n sind die Eckpunkte von Dreiecken $P\,R_n\,Q_n$.
Zeichnen Sie das Dreieck $P\,R_1\,Q_1$ für $x = 3$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Punkt M_2 auf der Strecke $[F\,S]$ liegt senkrecht über dem Punkt P.
Zeichnen Sie M_2 und das Dreieck $P\,R_2\,Q_2$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.
Bestimmen Sie sodann durch Rechnung den zugehörigen Wert für x und die Länge der Strecke $[R_2\,Q_2]$.
$\left[\text{ Ergebnis:} \quad \overline{R_2\,Q_2} = 2,92 \text{ cm}\right]$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

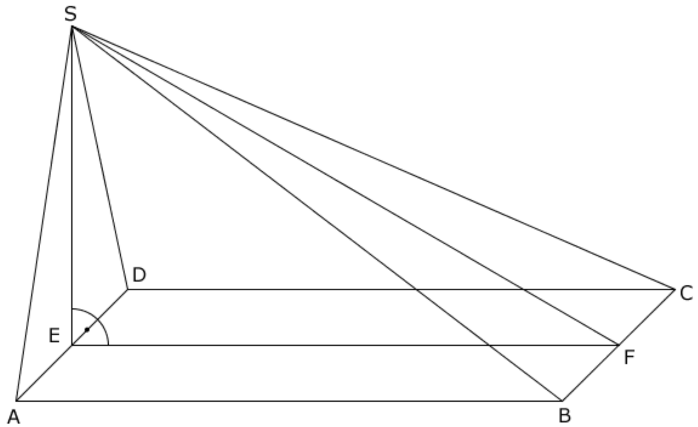
Das Dreieck $P\,R_2\,Q_2$ ist die Grundfläche der Pyramide $P\,R_2\,Q_2\,F$.
Ermitteln Sie rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide $P\,R_2\,Q_2\,F$ am Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,S$.

Lösung

Aufgabe A2.

Das Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = 12$ cm und $\overline{BC} = 7$ cm ist die Grundfläche der Pyramide $ABCDS$ (siehe Zeichnung). Die Spitze S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt E der Strecke $[AD]$ mit $\overline{ES} = 7$ cm. Der Punkt F ist der Mittelpunkt der Strecke $[BC]$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



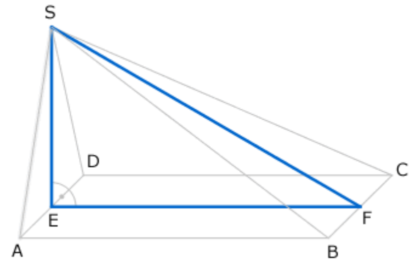
Aufgabe A2.1 (2 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels SFE sowie die Länge der Strecke $[FS]$.

$\left[\text{Ergebnisse:} \quad \varphi = 30,26°; \overline{FS} = 13,89 \text{ cm}\right]$

Lösung zu Aufgabe A2.1

Winkel bestimmen

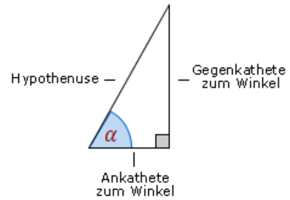


Gegeben: $\overline{AB} = 12$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm und $\overline{ES} = 7$ cm

Gesucht: $\measuredangle SFE = \varphi$

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck EFS. In diesem gilt:

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\varphi = \frac{\overline{ES}}{\overline{EF}}$$

$$\tan\varphi = \frac{7}{12}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan\varphi = \frac{7}{12}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{7}{12}$ $\rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{7}{12}\right) \approx 30,26°$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Satz des Pythagoras im Dreieck EFS anwenden:

$\overline{FS}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{ES}^2$

$\overline{FS}^2 = 12^2 + 7^2$

$\overline{FS} = \sqrt{12^2 + 7^2}$

$\overline{FS} = \sqrt{144 + 49}$

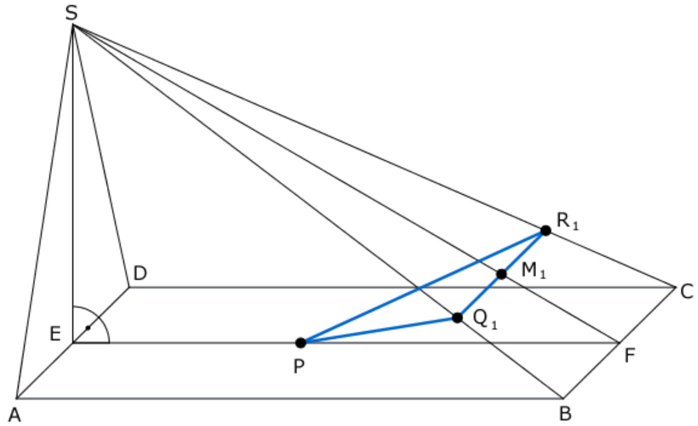
$\overline{FS} \approx 13,89$ cm

Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Der Punkt P liegt auf der Strecke $[EF]$ mit $\overline{EP} = 5$ cm. Für Punkte M_n auf der Strecke $[FS]$ gilt: $\overline{FM_n}(x) = x$ cm mit $x < 13,89$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Die Punkte M_n sind die Mittelpunkte von Strecken $[Q_n R_n]$ mit $R_n \in [CS]$, $Q_n \in [BS]$ und $[Q_n R_n] \parallel [BC]$.
Die Punkte P, R_n und Q_n sind die Eckpunkte von Dreiecken $P R_n Q_n$.
Zeichnen Sie das Dreieck $P R_1 Q_1$ für $x = 3$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Einzeichnen des Punktes P:
Antragen von $\overline{EP} = 5$ cm am Punkt E auf der Strecke $[EF]$.

2) Einzeichnen des Punktes M_1:
Antragen von $\overline{FM_1} = 3$ cm am Punkt F auf der Strecke $[FS]$.

3) Einzeichnen der Strecke $[Q_1 R_1]$:
Die Strecke $[BC]$ wird auf der Strecke $[FS]$ parallel verschoben bis der Punkt M_1 erreicht wird. Punkt Q_1 liegt auf der Strecke $[BS]$ und der Punkt R_1 liegt auf der Strecke $[CS]$.

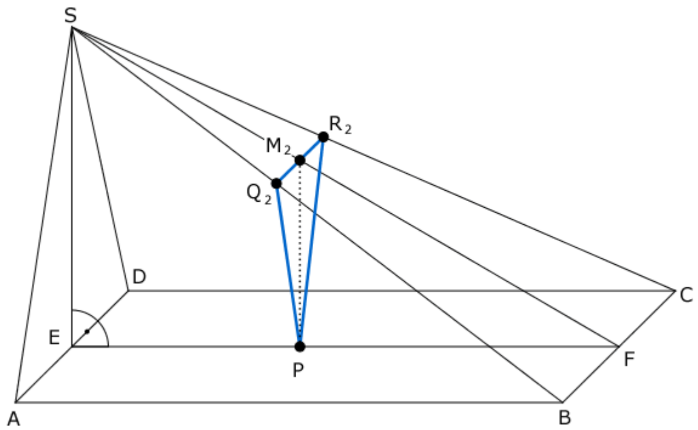
4) Einzeichnen des Dreiecks $P R_1 Q_1$:
Verbinden der Punkte R_1 und Q_1 mit dem Punkt P.

Aufgabe A2.3 (3 Punkte)

Der Punkt M_2 auf der Strecke $[FS]$ liegt senkrecht über dem Punkt P.
Zeichnen Sie M_2 und das Dreieck $P R_2 Q_2$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.
Bestimmen Sie sodann durch Rechnung den zugehörigen Wert für x und die Länge der Strecke $[R_2 Q_2]$.
$\left[\text{ Ergebnis: } \overline{R_2 Q_2} = 2,92 \text{ cm}\right]$

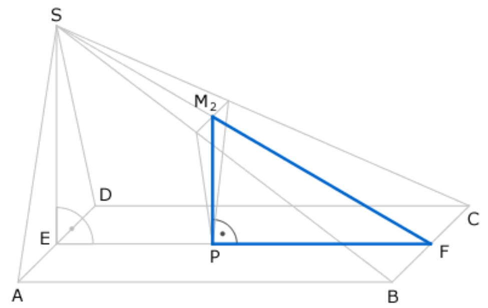
Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



> Erläuterung: *Einzeichnen*
>
> 1) Einzeichnen des Punktes M_2:
> Vom Punkt P aus wird das Lot gefällt bis man die Strecke $[F\,S]$ trifft.
>
> 2) Einzeichnen der Strecke $[Q_2\,R_2]$:
> Die Strecke $[Q_1\,R_1]$ wird auf der Strecke $[F\,S]$ parallel verschoben bis der Punkt M_2 erreicht wird. Punkt Q_2 liegt auf der Strecke $[B\,S]$ und der Punkt R_2 liegt auf der Strecke $[C\,S]$.
>
> 3) Einzeichnen des Dreiecks $P\,R_2\,Q_2$:
> Verbinden der Punkte R_2 und Q_2 mit dem Punkt P.

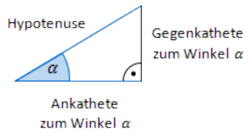
Seite eines Dreiecks bestimmen



Gegeben: $\overline{P\,F} = \overline{E\,F} - \overline{E\,P} = 12 - 5 = 7$ cm, $\varphi = 30,26^\circ$ und $\measuredangle F\,P\,M_2 = 90^\circ$

Gesucht: $\overline{M_2\,F} = x$

Im rechtwinkligem Dreieck $P\,F\,M_2$ gilt:

> Erläuterung: *Kosinus eines Winkels*
>
> 
>
>
> Der Kosinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.
>
> $$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$
>
> Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\cos 30,26^\circ = \frac{\overline{P\,F}}{x}$$

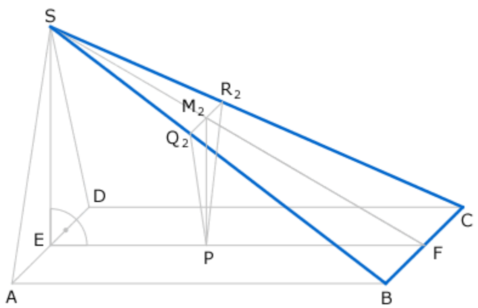
$$\cos 30,26^\circ = \frac{7}{x} \qquad | \cdot x$$

$$\cos 30,26^\circ \cdot x = 7 \qquad | : \cos 30,26^\circ$$

$x = \dfrac{7}{\cos 30,26°}$

$x = 8,10$ cm

Länge einer Strecke



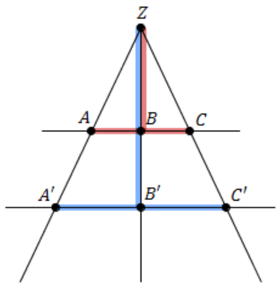
Gegeben: $\overline{SF} = 13,89$ cm, $\overline{BC} = 7,00$ cm und $\overline{M_2F} = 8,10$ cm

Gesucht: $\overline{Q_2R_2}$

Wir betrachten das Dreieck BCS:

Erläuterung:

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{B'Z}}$$

$$\frac{\overline{SM_2}}{\overline{Q_2R_2}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{13,89 - 8,10}{\overline{Q_2R_2}} = \frac{13,89}{7} \qquad | \cdot 7 \cdot \overline{Q_2R_2}$$

$$5,79 \cdot 7 = 13,89 \cdot \overline{Q_2R_2} \qquad | : 13,89$$

$$\overline{Q_2R_2} = \frac{5,79 \cdot 7}{13,89}$$

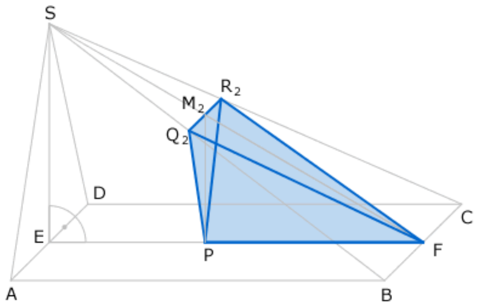
$$\overline{Q_2R_2} = 2,92 \text{ cm}$$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Das Dreieck PR_2Q_2 ist die Grundfläche der Pyramide PR_2Q_2F.
Ermitteln Sie rechnerisch den prozentualen Anteil des Volumens der Pyramide PR_2Q_2F am Volumen der Pyramide $ABCDS$.

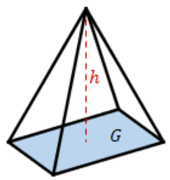
Lösung zu Aufgabe A2.4

Volumen einer Pyramide



Volumen Pyramide $ABCDS$:

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{ABCDS}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Rechteck ABCD}} \cdot \overline{ES}$$

$$V_{\text{ABCDS}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{ES}$$

$$V_{\text{ABCDS}} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 7 \cdot 7$$

$$V_{\text{ABCDS}} = 196 \text{ cm}^3$$

Volumen der Pyramide $V_{P\,R_2\,Q_2\,F}$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Die Grundfläche G ist das Dreieck $P\,R_2\,Q_2$.

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist stets gegeben durch:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

h_a ist die zur (Grund-)Seite a zugehörige Höhe.

$$A_{\text{Dreieck } P\,Q\,R} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_2\,R_2} \cdot \overline{M_2\,P}$$

Zur Berechnung der Länge der Strecke $\overline{Q_2\,R_2}$ wird das rechtwinklige Dreieck $P\,F\,M_2$ betrachtet:

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$x^2 = \overline{PF}^2 + \overline{M_2\,P}^2$$

$$8,1^2 = 7^2 + \overline{M_2\,P}^2$$

$$\overline{M_2\,P} = \sqrt{8,1^2 - 7^2} = 4,08 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad A_{\text{Dreieck } P\,Q_2\,R_2} = \frac{1}{2} \cdot 2,92 \cdot 4,08 = 5,96 \text{ cm}^2$$

Somit lässt sich nun auch das Volumen der Pyramide $V_{P\,R_2\,Q_2\,F}$ berechnen:

$$V_{P\,R_2\,Q_2\,F} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Dreieck } P\,Q_2\,R_2} \cdot h$$

$$V_{P\,R_2\,Q_2\,F} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,92 \cdot 4,08 \cdot 7$$

$$\Rightarrow \quad V_{P\,R_2\,Q_2\,F} = 13,90 \text{ cm}^3$$

Prozentrechnung

Prozentualen Anteil des Volumen der Pyramide $V_{P\,R_2\,Q_2\,F}$ am Volumens der Pyramide $V_{A\,B\,C\,D\,S}$ bestimmen:

$$\frac{V_{P\,R_2\,Q_2\,F}}{V_{A\,B\,C\,D\,S}} \cdot 100\% = 7,09\%$$