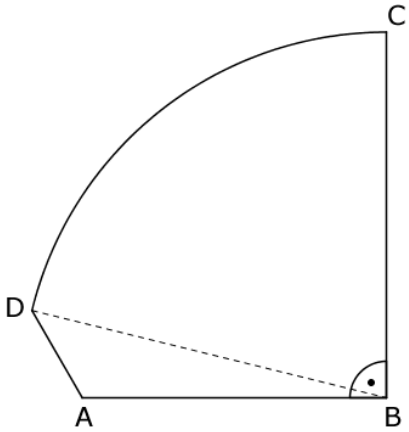
Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Die Figur $A\,B\,C\,D$ dient als Schnittvorlage für eine Glasscheibe (siehe Skizze).

Der Kreisbogen $\overset{\frown}{C\,D}$ hat den Punkt B als Mittelpunkt und den Radius $r = \overline{B\,C}$.

Es gilt: $\overline{A\,B} = 50,0$ cm; $\overline{B\,C} = 60,0$ cm, $\sphericalangle C\,B\,A = 90°$; $\sphericalangle B\,A\,D = 120°$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[D\,A]$.

[Teilergebnis: $\sphericalangle D\,B\,A = 13,8°$; Ergebnis: $\overline{D\,A} = 16,5$ cm]

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Glasscheibe wird aus einer quadratischen Glasplatte herausgeschnitten. Dazu bewegt sich ein Laserschneider mit einer Geschwindigkeit von 30 cm pro Sekunde entlang des Kreisbogens $\overset{\frown}{C\,D}$ und der Strecke $[D\,A]$.
Berechnen Sie die hierfür benötigte Zeit.

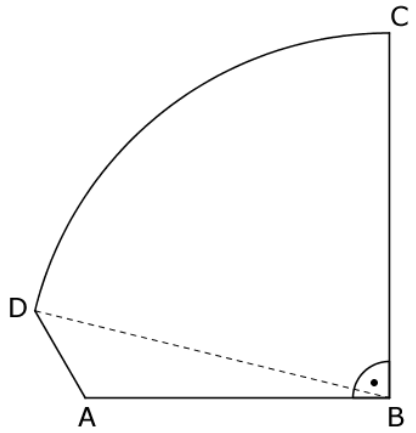
Lösung

Aufgabe A3.

Die Figur $A\,B\,C\,D$ dient als Schnittvorlage für eine Glasscheibe (siehe Skizze).

Der Kreisbogen $\overset{\frown}{C\,D}$ hat den Punkt B als Mittelpunkt und den Radius $r = \overline{B\,C}$.

Es gilt: $\overline{A\,B} = 50,0$ cm; $\overline{B\,C} = 60,0$ cm, $\sphericalangle C\,B\,A = 90°$; $\sphericalangle B\,A\,D = 120°$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

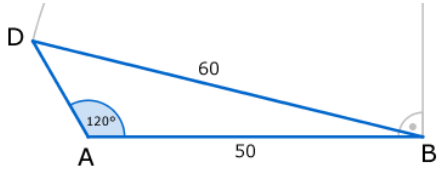
Aufgabe A3.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecke $[D\,A]$.

[Teilergebnis: $\sphericalangle D\,B\,A = 13,8°$; Ergebnis: $\overline{D\,A} = 16,5$ cm]

Lösung zu Aufgabe A3.1

Länge einer Strecke



Gegeben: $\overline{A\,B} = 50,0$ cm , $\overline{B\,C} = 60,0$ cm und $\measuredangle B\,A\,D = 120°$

Gesucht: $\overline{D\,A}$

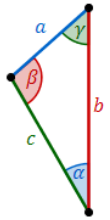
Wir betrachten das stumpfwinklige Dreieck $A\,B\,D$.

Erläuterung: *Erläuterung*

Um den Kosinussatz im Dreieck $A\,B\,D$ verwenden zu können muss der Winkel $\measuredangle D\,B\,A$ berechnet werden.

Berechnung des Winkel $\measuredangle D\,B\,A$:

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $A\,B\,D$ gilt somit: $\dfrac{\overline{A\,B}}{\sin\measuredangle A\,D\,B} = \dfrac{\overline{B\,D}}{\sin\measuredangle B\,A\,D} = \dfrac{\overline{D\,A}}{\sin\measuredangle D\,B\,A}$

$$\frac{\overline{B\,D}}{\sin\measuredangle B\,A\,D} = \frac{\overline{A\,B}}{\sin\measuredangle A\,D\,B}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da die Strecken $[B\,C]$ und $[B\,D]$ den Kreissektor $B\,C\,D$ begrenzen gilt:

$\overline{B\,C} = \overline{B\,D} = 60,0$ cm.

$$\frac{60}{\sin 120°} = \frac{50}{\sin\measuredangle A\,D\,B} \qquad |\cdot \sin\measuredangle A\,D\,B \qquad |\cdot \sin 120°$$

$$60 \cdot \sin\measuredangle A\,D\,B = 50 \cdot \sin 120° \qquad |:60$$

$$\sin\measuredangle A\,D\,B = \frac{50 \cdot \sin 120°}{60}$$

$$\Rightarrow \qquad \measuredangle A\,D\,B = 46,2°$$

Winkel $\measuredangle D\,B\,A$ bestimmen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

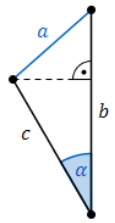
$\measuredangle D\,B\,A = 180° - \measuredangle B\,A\,D - \measuredangle A\,D\,B$

$\measuredangle D\,B\,A = 180° - 120° - 46,2°$

$\measuredangle D\,B\,A = 13,8°$

Strecke $\overline{D\,A}$ bestimmen:

Erläuterung:



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{D\,A}^2 = \overline{A\,B}^2 + \overline{B\,D}^2 - 2 \cdot \overline{A\,B} \cdot \overline{B\,D} \cdot \cos\measuredangle D\,B\,A$

$\overline{D\,A} = \sqrt{\overline{A\,B}^2 + \overline{B\,D}^2 - 2 \cdot \overline{A\,B} \cdot \overline{B\,D} \cdot \cos\measuredangle D\,B\,A}$

$\overline{D\,A} = \sqrt{50^2 + 60^2 - 2 \cdot 50 \cdot 60 \cdot \cos 13,8°}$

$\overline{D\,A} = 16,5$ cm

Aufgabe A3.2 (2 Punkte)

Die Glasscheibe wird aus einer quadratischen Glasplatte herausgeschnitten. Dazu bewegt sich ein Laserschneider mit einer Geschwindigkeit von 30 cm pro Sekunde entlang des Kreisbogens $\overset{\frown}{C\,D}$ und der Strecke $[D\,A]$.
Berechnen Sie die hierfür benötigte Zeit.

Lösung zu Aufgabe A3.2

Bogenlänge

Gegeben: $\overline{B\,C} = 60$ cm

Gesucht: $\overset{\frown}{C\,D}$

Erläuterung: *Kreisbogen berechnen*

Die Länge b eines Kreisbogens mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Der Mittelpunktswinkel α des Kreisbogens $\overset{\frown}{C\,D}$ ist der Winkel $\measuredangle C\,B\,D$:

$\measuredangle C\,B\,D = 90° - \measuredangle D\,B\,A$

$\measuredangle C\,B\,D = 90° - 13,8° = 76,2°$

Damit ergibt sich für die Bogenlänge $\overset{\frown}{C\,D}$:

$\overset{\frown}{C\,D} = 2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot \frac{76,2°}{360°}$

$\overset{\frown}{C\,D} = 79,8$ cm

Physikalische Anwendung

© Realschulrep.de

Berechnung der Schnittlänge des Laserschneiders:

$s = \overset{\frown}{CD} + \overline{DA}$

$s = 79,8 + 16,5$

$s = 96,3 \text{ cm}$

Berechnung der dafür benötigten Zeit t:

$\frac{30 \text{ cm}}{s} = \frac{96,3 \text{ cm}}{t} \quad | \cdot t \quad | : 30 \text{ cm}$

$\frac{t}{s} = \frac{96,3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} \quad | \cdot s$

$t = \frac{96,3 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} \cdot s$

$t = 3,2s$