

## Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe B1

### Aufgabe B1.

Die Parabel  $p$  verläuft durch die Punkte  $P(-3|0)$  und  $Q(5|0)$ . Sie hat eine Gleichung der Form  $y = a \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + c$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = -0,1x - 2$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für  $a$  und  $c$ , dass die Parabel  $p$  die Gleichung  $y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$  hat. Zeichnen Sie sodann die Gerade  $g$  sowie die Parabel  $p$  für  $x \in [-4, 7]$  in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-5 \leq x \leq 8$ ;  $-5 \leq y \leq 5$

#### Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte  $A_n (x | -0,25x^2 + 0,5x + 3,75)$  auf der Parabel  $p$  und Punkte  $B_n (x | -0,1x - 2)$  auf der Geraden  $g$  haben dieselbe Abszisse  $x$ .

Sie sind zusammen mit Punkten  $C_n$  und  $D_n$  für  $x \in ]-3, 7[; 6, 14[$  die Eckpunkte von Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$ .

Die Punkte  $C_n$  liegen ebenfalls auf der Geraden  $g$ . Dabei ist die Abszisse  $x$  der Punkte  $C_n$  jeweils um 2 größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$ .

Zeichnen Sie die Parallelogramme  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = -2$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 3$  in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

#### Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecken  $[A_n B_n]$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

[Ergebnis:  $\overline{A_n B_n}(x) = (-0,25x^2 + 0,6x + 5,75)$  LE]

#### Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt.

#### Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  gibt es die Rauten  $A_3 B_3 C_3 D_3$  und  $A_4 B_4 C_4 D_4$ . Berechnen Sie die  $x$ -Koordinaten der Punkte  $A_3$  und  $A_4$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis:  $\overline{B_n C_n} = 2,01$  LE]

### Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  kein Rechteck gibt.

## Lösung

## Aufgabe B1.

Die Parabel  $p$  verläuft durch die Punkte  $P(-3|0)$  und  $Q(5|0)$ . Sie hat eine Gleichung der Form  $y = a \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + c$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .  
Die Gerade  $g$  hat die Gleichung  $y = -0,1x - 2$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

## Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für  $a$  und  $c$ , dass die Parabel  $p$  die Gleichung  $y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$  hat. Zeichnen Sie sodann die Gerade  $g$  sowie die Parabel  $p$  für  $x \in [-4, 7]$  in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-5 \leq x \leq 8$ ;  $-5 \leq y \leq 5$

Lösung zu Aufgabe B1.1**Funktionsgleichung ermitteln**

Gegeben:

$$p : a x^2 + 0,5x + c$$

$P(-3|0)$ ,  $Q(5|0)$  liegen auf  $p$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Punkte  $P$  und  $Q$  werden in die Parabelgleichung eingesetzt. Dann erhält man zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten  $a$  und  $c$ .

$$(I) 0 = a \cdot (-3)^2 + 0,5 \cdot (-3) + c$$

$$(II) 0 = a \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 5 + c$$

$$(I) 0 = 9a - 1,5 + c$$

$$(II) 0 = 25a + 2,5 + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (I) wird von Gleichung (II) subtrahiert, so dass die Variable  $c$  wegfällt.

$$(II)-(I) 0 = 16a + 4 \quad | -4$$

$$(II)-(I) -4 = 16a \quad | :16$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4} = -0,25$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$a = -0,25$  wird in Gleichung (II)  $0 = 25a + 2,5 + c$  eingesetzt.  
Anschließend wird die Gleichung nach  $c$  aufgelöst.

$$a = -0,25 \text{ in (II):}$$

$$0 = 25 \cdot (-0,25) + 2,5 + c$$

$$0 = -6,25 + 2,5 + c$$

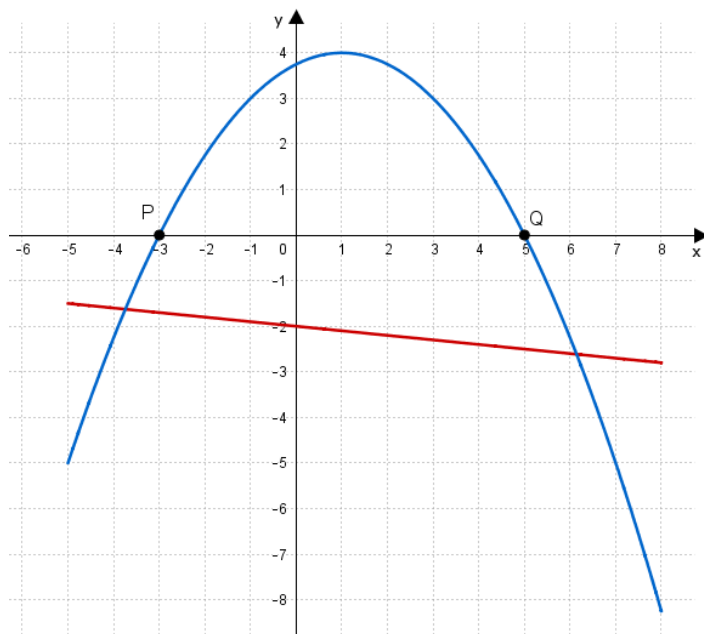
$$0 = -3,75 + c \quad | +3,75$$

$$\Rightarrow c = 3,75$$

$$\Rightarrow p : y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$$

**Skizze**

Einzeichnen der Parabel  $p : y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$  und der Geraden  $g : y = -0,1x - 2$ :



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Geraden  $g$ :

- Umwandeln der Steigung  $m_g = -0,1$  in einen Bruch  $m_g = -\frac{1}{10}$ .
- Einzeichnen des  $y$ -Achsenabschnittes  $t = -2$  auf der  $y$ -Achse.
- Antragen der Steigung  $m_g = -\frac{1}{10}$  ausgehend vom  $y$ -Achsenabschnitt:
  - 1) 10 Einheiten parallel zur  $x$ -Achse nach rechts gehen
  - 2) 1 Einheit parallel zur  $y$ -Achse nach unten gehen
  - 3) Punkt setzen
- Gerade durch den  $y$ -Achsenabschnitt und den ermittelten Punkt legen.

Einzeichnen der Parabel:

- Ermittlung des Scheitelpunktes:

$$S \left( \frac{-b}{2a} \mid y_S \right) \Rightarrow S (1 \mid 4)$$

- Einzeichnen des Scheitelpunktes.
- Berechnung weitere Funktionswerte mithilfe des Taschenrechners.
- Antragen der berechneten Punkte und verbinden zu Parabel.

#### Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte  $A_n (x \mid -0,25x^2 + 0,5x + 3,75)$  auf der Parabel  $p$  und Punkte  $B_n (x \mid -0,1x - 2)$  auf der Geraden  $g$  haben dieselbe Abszisse  $x$ .

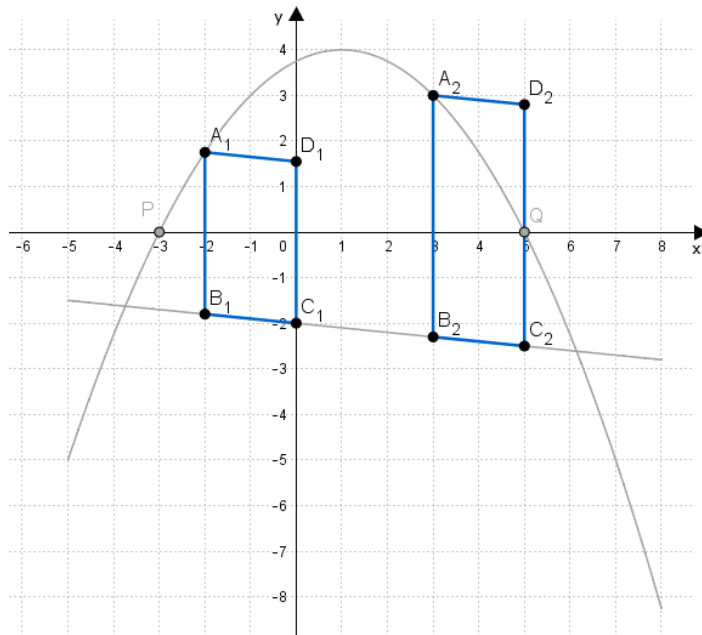
Sie sind zusammen mit Punkten  $C_n$  und  $D_n$  für  $x \in ]-3, 7[; 6, 14[$  die Eckpunkte von Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$ .

Die Punkte  $C_n$  liegen ebenfalls auf der Geraden  $g$ . Dabei ist die Abszisse  $x$  der Punkte  $C_n$  jeweils um 2 größer als die Abszisse  $x$  der Punkte  $B_n$ .

Zeichnen Sie die Parallelogramme  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = -2$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 3$  in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

#### Lösung zu Aufgabe B1.2

*Skizze*



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Parallelogramms  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = -2$ :

- 1) Antragen des Punktes  $A_1$ , indem man auf der  $x$ -Achse zu  $x = -2$  geht und dann nach oben, bis man auf den Geraden der Parabel  $p$  stößt.
- 2) Antragen des Punktes  $B_1$ , indem man auf der  $x$ -Achse zu  $x = -2$  geht und dann nach unten, bis man auf den Geraden der Geraden  $g$  stößt.
- 3) Antragen des Punktes  $C_1$ , indem man auf der  $x$ -Achse zu  $x = 0$  geht da  $x_C = x_B + 2$  und dann nach unten, bis man wiederum auf den Graphen der Geraden  $g$  trifft.
- 4) Messen der Länge  $\overline{A_1 B_1}$ .
- 5) Antragen der Strecke  $[C_1 D_1]$  am Punkt  $C$  mit der Länge  $\overline{C_1 D_1} = \overline{A_1 B_1}$ .
- 6) Verbinden der Punkte  $A_1, B_1, C_1, D_1$  zum Parallelogramm.

Einzeichnen des Parallelogramms  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 3$ :

### Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecken  $[A_n B_n]$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$ .

[Ergebnis:  $\overline{A_n B_n}(x) = (-0,25x^2 + 0,6x + 5,75)$  LE]

### Lösung zu Aufgabe B1.3

#### Länge einer Strecke

Gegeben:  $A_n(x | -0,25x^2 + 0,5x + 3,75)$  und  $B_n(x | -0,1x - 2)$

Gesucht:  $\overline{A_n B_n}(x)$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte  $A_n$  und  $B_n$  die gleiche Abszisse ( $x$ -Wert) haben und die Punkte  $B_n$  oberhalb den Punkten  $A_n$  liegen, gilt:

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75 - (-0,1x - 2)$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75 + 0,1x + 2$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,6x + 5,75 \text{ LE}$$

#### Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt.

#### Lösung zu Aufgabe B1.4

##### Flächeninhalt eines Parallelogramms

Gesucht: Flächeninhalt  $A_{A_n B_n C_n D_n}$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Rechtecks/Parallelogramms*

Der Flächeninhalt  $A$  eines Parallelogramms mit der Seitenlänge  $a$  und der Höhe  $h_a$  beträgt:

$$A = a \cdot h_a$$

In unserem Fall ist die Seitenlänge  $a$  die Länge der Strecke  $\overline{A_n B_n}$  und die Höhe  $h_a$  entspricht dem Abstand  $d$  der Strecken  $[A_n B_n]$  und  $[C_n D_n]$

$$A(x) = \overline{A_n B_n} \cdot d([A_n B_n]; [C_n D_n])$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Abstand  $d([A_n B_n]; [C_n D_n])$  der Strecke  $[A_n B_n]$  von der Strecke  $[C_n D_n]$  beträgt 2 LE, da  $[A_n B_n] \parallel [C_n D_n]$  und  $x_{C_n} = x_{B_n} + 2$ .

$$A(x) = (-0,25x^2 + 0,6x + 5,75) \cdot 2$$

$$A(x) = -0,5x^2 + 1,2x + 11,5 \text{ FE}$$

Nun soll überprüft werden, ob es ein Parallelogramm mit einen Flächeninhalt von 13 FE gibt:

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Der Flächeninhalt  $A(x)$  wird mit 13 FE gleichgesetzt und nach  $x$  aufgelöst.

$$13 = -0,5x^2 + 1,2x + 11,5 \quad | -13$$

$$0 = -0,5x^2 + 1,2x - 1,5 \quad | \text{ Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Es reicht, nur die Diskriminante  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$  zu überprüfen.  
Falls die Diskriminante negativ ist, existiert keine Lösung.

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = 1,2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5)$$

$$D = 1,44 - 3$$

$$D = -1,56 < 0$$

$\Rightarrow$  Es gibt kein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE.

**Aufgabe B1.5** (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  gibt es die Rauten  $A_3 B_3 C_3 D_3$  und  $A_4 B_4 C_4 D_4$ . Berechnen Sie die  $x$ -Koordinaten der Punkte  $A_3$  und  $A_4$  auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis:  $\overline{B_n C_n} = 2,01$  LE]

**Lösung zu Aufgabe B1.5****Länge einer Strecke**

Falls das Parallelogramm  $A_n B_n C_n D_n$  eine Raute ist gilt:  $\overline{A_n B_n} = \overline{B_n C_n}$

Gegeben:  $\overline{A_n B_n} = -0,25x^2 + 0,6x + 5,75$ ;  $m_g = -0,1$

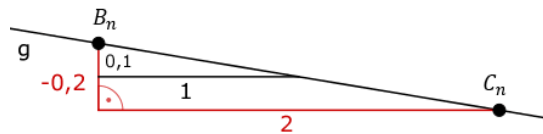
Gesucht:  $\overline{B_n C_n}$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden, Richtungsvektor*

Die Gerade  $g$  besitzt die Steigung  $m_g = -0,1 = \frac{-0,1}{1}$ .

Da  $x_C - x_B = 2$  LE, erhält man bei Erweiterung des Steigungsquotienten mit 2, genau das Steigungsdreieck mit den Eckpunkten  $B_n$  und  $C_n$ :

$$m_g = -0,1 = \frac{-0,1}{1} = \frac{-0,2}{2}$$



$$\overline{B_n C_n}^2 = 2^2 + 0,2^2$$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $a$  und  $b$  und der Hypotenuse  $c$  gilt:  $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{B_n C_n} = \sqrt{4,04}$$

$$\overline{B_n C_n} = 2,01 \text{ LE}$$

$$\overline{A_n B_n} = \overline{B_n C_n}$$

$$-0,25x^2 + 0,6x + 5,75 = 2,01 \quad | -2,01$$

$$-0,25x^2 + 0,6x + 3,74 = 0 \quad | \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 3,74}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{4,1}}{-0,5}$$

$$x_1 \approx -2,85 \quad \text{und} \quad x_2 \approx 5,25$$

Damit ist  $x_{A_3} = -2,85$  und  $x_{A_4} = 5,25$ .

**Aufgabe B1.6** (2 Punkte)

Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  kein Rechteck gibt.

**Lösung zu Aufgabe B1.6****Begründung**

Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn ein Innenwinkel das Maß  $90^\circ$  besitzt. Das ist bei den Parallelogrammen  $A_n B_n C_n D_n$  niemals der Fall. Die Winkel  $\angle C_n B_n A_n$  sind immer gleich groß und größer als  $90^\circ$ , da die Gerade  $g$ , auf der  $[B_n C_n]$  liegen, keine Parallele zur  $x$ -Achse ist, und deshalb  $[A_n B_n]$  nie senkrecht auf  $[B_n C_n]$  steht.