

Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe B1

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-3|0)$ und $Q(5|0)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$.

Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,1x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$ hat. Zeichnen Sie sodann die Gerade g sowie die Parabel p für $x \in [-4, 7]$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 8$; $-5 \leq y \leq 5$

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n (x | -0,25x^2 + 0,5x + 3,75)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n (x | -0,1x - 2)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x .

Sie sind zusammen mit Punkten C_n und D_n für $x \in]-3, 7[$; $6, 14[$ die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$.

Die Punkte C_n liegen ebenfalls auf der Geraden g . Dabei ist die Abszisse x der Punkte C_n jeweils um 2 größer als die Abszisse x der Punkte B_n .

Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecken $[A_n B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

[Ergebnis: $\overline{A_n B_n}(x) = (-0,25x^2 + 0,6x + 5,75)$ LE]

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ gibt es die Rauten $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$. Berechnen Sie die x -Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $\overline{B_n C_n} = 2,01$ LE]

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ kein Rechteck gibt.

Lösung

Aufgabe B1.

Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-3|0)$ und $Q(5|0)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = a \cdot x^2 + 0,5 \cdot x + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g hat die Gleichung $y = -0,1x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für a und c , dass die Parabel p die Gleichung $y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$ hat. Zeichnen Sie sodann die Gerade g sowie die Parabel p für $x \in [-4, 7]$ in ein Koordinatensystem ein.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 8$; $-5 \leq y \leq 5$

Lösung zu Aufgabe B1.1**Funktionsgleichung ermitteln**

Gegeben:

$$p : a x^2 + 0,5x + c$$

$P(-3|0)$, $Q(5|0)$ liegen auf p

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Punkte P und Q werden in die Parabelgleichung eingesetzt. Dann erhält man zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a und c .

$$(I) 0 = a \cdot (-3)^2 + 0,5 \cdot (-3) + c$$

$$(II) 0 = a \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 5 + c$$

$$(I) 0 = 9a - 1,5 + c$$

$$(II) 0 = 25a + 2,5 + c$$

Erläuterung: *Gleichungssystem lösen - Additionsverfahren*

Gleichung (I) wird von Gleichung (II) subtrahiert, so dass die Variable c wegfällt.

$$(II)-(I) 0 = 16a + 4 \quad | -4$$

$$(II)-(I) -4 = 16a \quad | :16$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4} = -0,25$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$a = -0,25$ wird in Gleichung (II) $0 = 25a + 2,5 + c$ eingesetzt.
Anschließend wird die Gleichung nach c aufgelöst.

$$a = -0,25 \text{ in (II):}$$

$$0 = 25 \cdot (-0,25) + 2,5 + c$$

$$0 = -6,25 + 2,5 + c$$

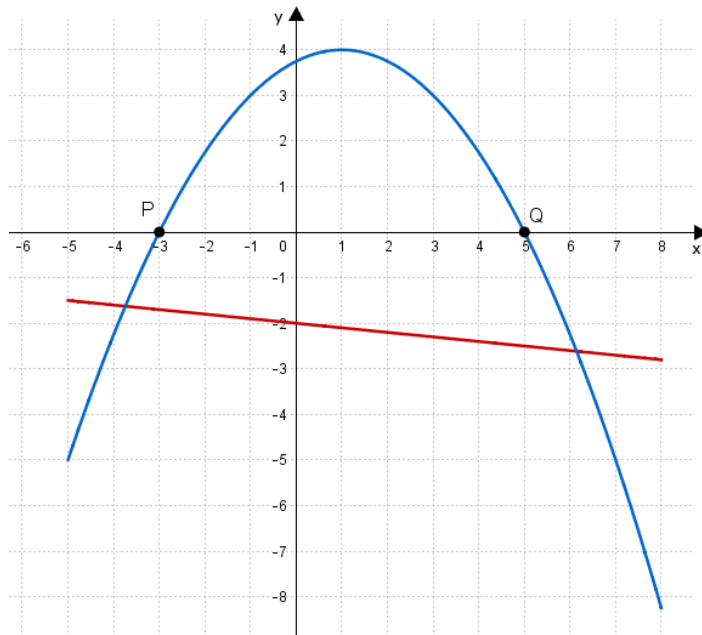
$$0 = -3,75 + c \quad | +3,75$$

$$\Rightarrow c = 3,75$$

$$\Rightarrow p : y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$$

Skizze

Einzeichnen der Parabel $p : y = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75$ und der Geraden $g : y = -0,1x - 2$:



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen der Geraden g :

- Umwandeln der Steigung $m_g = -0,1$ in einen Bruch $m_g = -\frac{1}{10}$.
- Einzeichnen des y -Achsenabschnittes $t = -2$ auf der y -Achse.
- Antragen der Steigung $m_g = -\frac{1}{10}$ ausgehend vom y -Achsenabschnitt:
 - 1) 10 Einheiten parallel zur x -Achse nach rechts gehen
 - 2) 1 Einheit parallel zur y -Achse nach unten gehen
 - 3) Punkt setzen
- Gerade durch den y -Achsenabschnitt und den ermittelten Punkt legen.

Einzeichnen der Parabel:

- Ermittlung des Scheitelpunktes:

$$S \left(\frac{-b}{2a} \mid y_S \right) \Rightarrow S (1 \mid 4)$$

- Einzeichnen des Scheitelpunktes.
- Berechnung weitere Funktionswerte mithilfe des Taschenrechners.
- Antragen der berechneten Punkte und verbinden zu Parabel.

Aufgabe B1.2 (2 Punkte)

Punkte $A_n (x \mid -0,25x^2 + 0,5x + 3,75)$ auf der Parabel p und Punkte $B_n (x \mid -0,1x - 2)$ auf der Geraden g haben dieselbe Abszisse x .

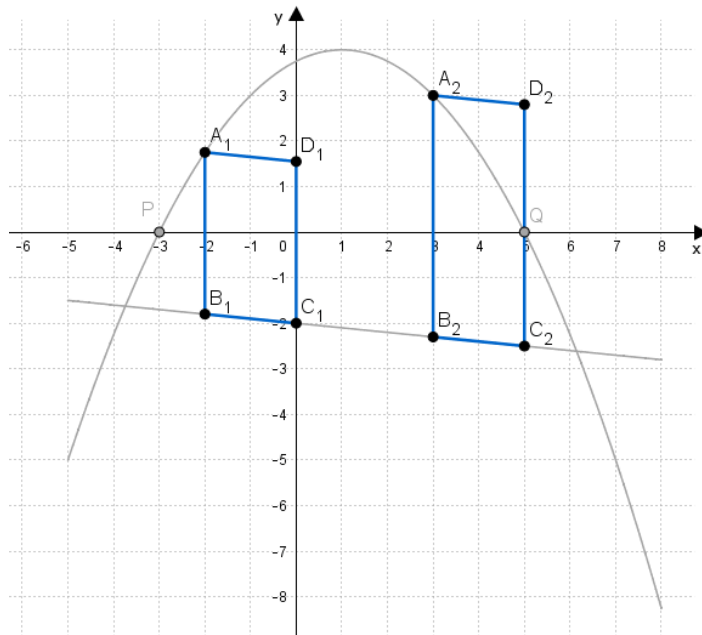
Sie sind zusammen mit Punkten C_n und D_n für $x \in]-3,74; 6,14[$ die Eckpunkte von Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$.

Die Punkte C_n liegen ebenfalls auf der Geraden g . Dabei ist die Abszisse x der Punkte C_n jeweils um 2 größer als die Abszisse x der Punkte B_n .

Zeichnen Sie die Parallelogramme $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -2$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 3$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B1.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Parallelogramms $A_1 B_1 C_1 D_1$ für $x = -2$:

- 1) Antragen des Punktes A_1 , indem man auf der x -Achse zu $x = -2$ geht und dann nach oben, bis man auf den Geraden der Parabel p stößt.
- 2) Antragen des Punktes B_1 , indem man auf der x -Achse zu $x = -2$ geht und dann nach unten, bis man auf den Geraden der Geraden g stößt.
- 3) Antragen des Punktes C_1 , indem man auf der x -Achse zu $x = 0$ geht da $x_C = x_B + 2$ und dann nach unten, bis man wiederum auf den Graphen der Geraden g trifft.
- 4) Messen der Länge $\overline{A_1 B_1}$.
- 5) Antragen der Strecke $[C_1 D_1]$ am Punkt C mit der Länge $\overline{C_1 D_1} = \overline{A_1 B_1}$.
- 6) Verbinden der Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 zum Parallelogramm.

Einzeichnen des Parallelogramms $A_2 B_2 C_2 D_2$ für $x = 3$:

Aufgabe B1.3 (2 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Strecken $[A_n B_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n .

[Ergebnis: $\overline{A_n B_n}(x) = (-0,25x^2 + 0,6x + 5,75)$ LE]

Lösung zu Aufgabe B1.3

Länge einer Strecke

Gegeben: $A_n(x | -0,25x^2 + 0,5x + 3,75)$ und $B_n(x | -0,1x - 2)$

Gesucht: $\overline{A_n B_n}(x)$

Erläuterung: *Länge einer Strecke*

Da die Punkte A_n und B_n die gleiche Abszisse (x -Wert) haben und die Punkte B_n oberhalb den Punkten A_n liegen, gilt:

$$\overline{A_n B_n} = y_{B_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = y_{A_n} - y_{B_n}$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75 - (-0,1x - 2)$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,5x + 3,75 + 0,1x + 2$$

$$\overline{A_n B_n}(x) = -0,25x^2 + 0,6x + 5,75 \text{ LE}$$

Aufgabe B1.4 (3 Punkte)

Überprüfen Sie rechnerisch, ob es unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.4

Flächeninhalt eines Parallelogramms

Gesucht: Flächeninhalt $A_{A_n B_n C_n D_n}$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Rechtecks/Parallelogramms*

Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms mit der Seitenlänge a und der Höhe h_a beträgt:

$$A = a \cdot h_a$$

In unserem Fall ist die Seitenlänge a die Länge der Strecke $\overline{A_n B_n}$ und die Höhe h_a entspricht dem Abstand d der Strecken $[A_n B_n]$ und $[C_n D_n]$

$$A(x) = \overline{A_n B_n} \cdot d([A_n B_n]; [C_n D_n])$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Abstand $d([A_n B_n]; [C_n D_n])$ der Strecke $[A_n B_n]$ von der Strecke $[C_n D_n]$ beträgt 2 LE, da $[A_n B_n] \parallel [C_n D_n]$ und $x_{C_n} = x_{B_n} + 2$.

$$A(x) = (-0,25x^2 + 0,6x + 5,75) \cdot 2$$

$$A(x) = -0,5x^2 + 1,2x + 11,5 \text{ FE}$$

Nun soll überprüft werden, ob es ein Parallelogramm mit einen Flächeninhalt von 13 FE gibt:

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Der Flächeninhalt $A(x)$ wird mit 13 FE gleichgesetzt und nach x aufgelöst.

$$13 = -0,5x^2 + 1,2x + 11,5 \quad | -13$$

$$0 = -0,5x^2 + 1,2x - 1,5 \quad | \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Es reicht, nur die Diskriminante $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$ zu überprüfen.
Falls die Diskriminante negativ ist, existiert keine Lösung.

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$D = 1,2^2 - 4 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5)$$

$$D = 1,44 - 3$$

$$D = -1,56 < 0$$

\Rightarrow Es gibt kein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 13 FE.

Aufgabe B1.5 (4 Punkte)

Unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ gibt es die Rauten $A_3 B_3 C_3 D_3$ und $A_4 B_4 C_4 D_4$. Berechnen Sie die x -Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

[Teilergebnis: $\overline{B_n C_n} = 2,01$ LE]

Lösung zu Aufgabe B1.5**Länge einer Strecke**

Falls das Parallelogramm $A_n B_n C_n D_n$ eine Raute ist gilt: $\overline{A_n B_n} = \overline{B_n C_n}$

Gegeben: $\overline{A_n B_n} = -0,25x^2 + 0,6x + 5,75$; $m_g = -0,1$

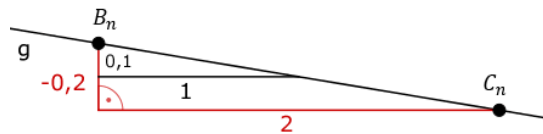
Gesucht: $\overline{B_n C_n}$

Erläuterung: *Steigung einer Geraden, Richtungsvektor*

Die Gerade g besitzt die Steigung $m_g = -0,1 = \frac{-0,1}{1}$.

Da $x_C - x_B = 2$ LE, erhält man bei Erweiterung des Steigungsquotienten mit 2, genau das Steigungsdreieck mit den Eckpunkten B_n und C_n :

$$m_g = -0,1 = \frac{-0,1}{1} = \frac{-0,2}{2}$$



$$\overline{B_n C_n}^2 = 2^2 + 0,2^2$$

Erläuterung: *Satz des Pythagoras*

In jedem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\overline{B_n C_n} = \sqrt{4,04}$$

$$\overline{B_n C_n} = 2,01 \text{ LE}$$

$$\overline{A_n B_n} = \overline{B_n C_n}$$

$$-0,25x^2 + 0,6x + 5,75 = 2,01 \quad | -2,01$$

$$-0,25x^2 + 0,6x + 3,74 = 0 \quad | \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{0,6^2 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 3,74}}{2 \cdot (-0,25)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-0,6 \pm \sqrt{4,1}}{-0,5}$$

$$x_1 \approx -2,85 \quad \text{und} \quad x_2 \approx 5,25$$

Damit ist $x_{A_3} = -2,85$ und $x_{A_4} = 5,25$.

Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass es unter den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ kein Rechteck gibt.

Lösung zu Aufgabe B1.6**Begründung**

Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn ein Innenwinkel das Maß 90° besitzt. Das ist bei den Parallelogrammen $A_n B_n C_n D_n$ niemals der Fall. Die Winkel $\angle C_n B_n A_n$ sind immer gleich groß und größer als 90° , da die Gerade g , auf der $[B_n C_n]$ liegen, keine Parallele zur x -Achse ist, und deshalb $[A_n B_n]$ nie senkrecht auf $[B_n C_n]$ steht.