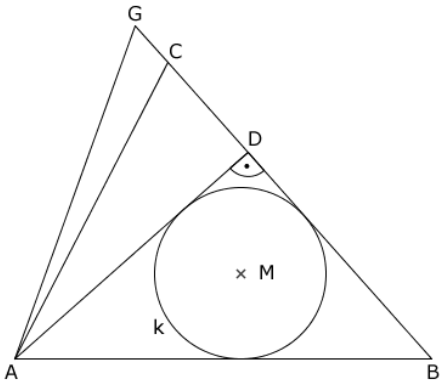
Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik II Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Gegeben ist das Dreieck $A\,B\,C$ mit $\overline{A\,B} = 10$ cm, $\overline{A\,C} = 8$ cm, $\overline{B\,C} = 9,5$ cm.
Der Punkt D ist der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt A auf die Seite $[B\,C]$ (siehe Skizze).



Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (1 Punkt)

Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B\,C$ und die Strecke $[A\,D]$.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels $C\,B\,A$, das Maß ε des Winkels $B\,A\,D$ und die Länge der Strecke $[A\,D]$.
[Ergebnisse: $\beta = 48,36°, \varepsilon = 41,64°$]

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Der Punkt G auf der Verlängerung der Strecke $[B\,C]$ über C hinaus ist ein Eckpunkt des Dreiecks $A\,B\,G$. Der Winkel $B\,A\,G$ hat das Maß 70°.
Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B\,G$ und berechnen Sie die Länge der Strecke $[C\,G]$.

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Im Dreieck $A\,B\,D$ berührt der Inkreis k die Seite $[A\,B]$ im Punkt E und die Seite $[A\,D]$ im Punkt F.
Zeichnen Sie den Inkreis k mit seinem Mittelpunkt M und die Strecken $[M\,E]$ und $[M\,F]$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels $A\,M\,B$ und den Inkreisradius $r = \overline{M\,E}$.
[Ergebnisse: $\varphi = 135°, r = 2,06$ cm]

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

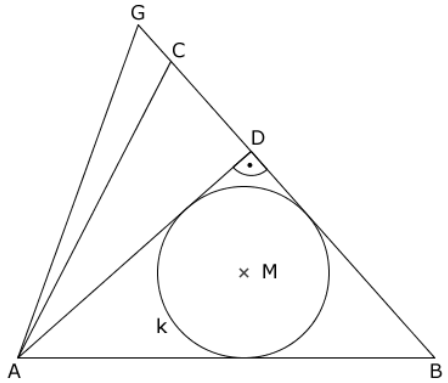
Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Flächenstücks $A\,E\,F$, das vom Kreisbogen $\overset{\frown}{F\,E}$ sowie von den Strecken $[E\,A]$ und $[A\,F]$ begrenzt wird.

© Realschulrep.de

Lösung

Aufgabe B2.

Gegeben ist das Dreieck $A\,B\,C$ mit $\overline{A\,B} = 10$ cm, $\overline{A\,C} = 8$ cm, $\overline{B\,C} = 9,5$ cm.
Der Punkt D ist der Fußpunkt des Lotes vom Eckpunkt A auf die Seite $[B\,C]$ (siehe Skizze).



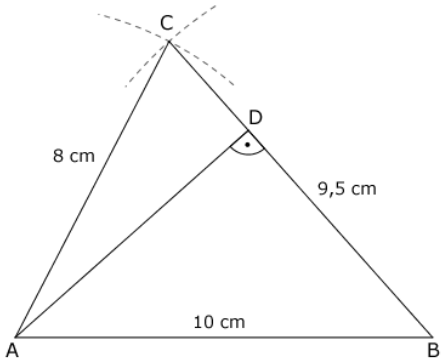
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (1 Punkte)

Zeichnen Sie das Dreieck $A\,B\,C$ und die Strecke $[A\,D]$.

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

Einzeichnen des Dreiecks $A\,B\,C$:

- Festlegen der Strecke $[A\,B]$ mit $\overline{A\,B} = 10$ cm.
- Einzeichnen eines Kreises um A mit Radius $r = \overline{A\,C} = 8$ cm.
- Einzeichnen eines Kreises um B mit Radius $r = \overline{B\,C} = 9,5$ cm.

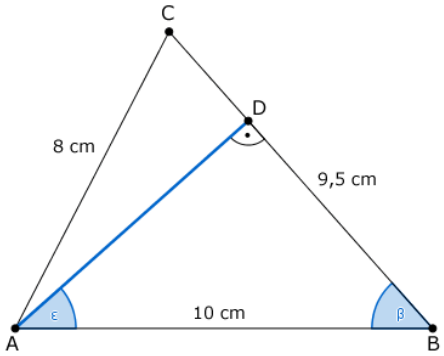
Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß β des Winkels $C\,B\,A$, das Maß ε des Winkels $B\,A\,D$ und die Länge der Strecke $[A\,D]$.
[Ergebnisse: $\beta = 48,36°, \varepsilon = 41,64°$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Winkel bestimmen

© Realschulrep.de

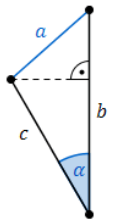


Gegeben: $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 9,5$ cm

Gesucht: $\measuredangle CBA = \beta$, $\measuredangle BAD = \varepsilon$ und $\overline{AD}$

Der Winkel β wird mit dem Kosinussatz berechnet.

Erläuterung: *Kosinussatz*



Sind in einem beliebigen Dreieck zwei Seiten b und c und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel α gegeben, so kann der Kosinussatz angewendet werden:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \cos\beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad | \quad +2 \cdot \cos\beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}$

$\overline{AC}^2 + 2 \cdot \cos\beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad | \quad -\overline{AC}^2$

$2 \cdot \cos\beta \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 \quad | \quad :\left(2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}\right)$

$$\cos\beta = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}$$

$$\cos\beta = \frac{10^2 + 9,5^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9,5} \quad | \quad \cos^{-1}$$

$\beta = 48,36°$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

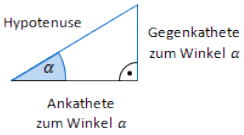
Im rechtwinkligen Dreieck ABD gilt: $\varepsilon + 90° + \beta = 180°$

Im rechtwinkligen Dreieck ABD gilt:

$\varepsilon = 180° - \beta - 90° = 180° - 48,36 - 90° = 41,64°$

Zur Berechnung von $\overline{AD}$ wird ebenfalls das rechtwinklige Dreieck ABD herangezogen.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

© Realschulrep.de

$\sin 48,36° = \frac{\overline{AD}}{10} | \cdot 10$

$\overline{AD} = 10 \cdot \sin 48,36°$

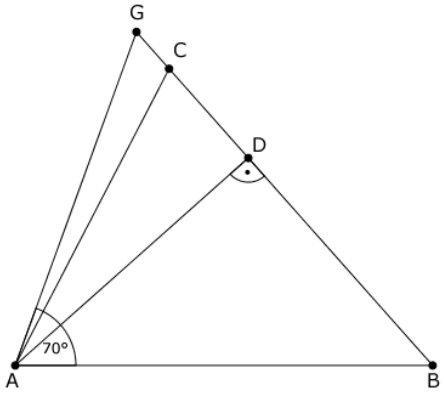
$\overline{AD} = 7,47$ cm

Aufgabe B2.3 (4 Punkte)

Der Punkt G auf der Verlängerung der Strecke $[BC]$ über C hinaus ist ein Eckpunkt des Dreiecks ABG. Der Winkel BAG hat das Maß 70°.
Zeichnen Sie das Dreieck ABG und berechnen Sie die Länge der Strecke $[CG]$.

Lösung zu Aufgabe B2.3

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Verlängerung der Strecke $[BC]$ um den Punkt C hinaus.

2) Antragen des Winkels $\angle BAG = 70°$ am Punkt A.

3) Antragen des Punktes G an der Schnittstelle zwischen Winkelschenkel und der Verlängerung der Seite $[BD]$.

4) Einzeichnen des Dreiecks ABG.

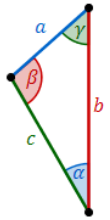
Länge einer Strecke

Gesucht: $\overline{CG}$

Es gilt: $\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC}$

Somit muss als erstes die Steckenlänge $\overline{BG}$ berechnet werden.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck ABG gilt somit: $\frac{\overline{AB}}{\sin\angle AGB} = \frac{\overline{BG}}{\sin\angle BAG} = \frac{\overline{GA}}{\sin\angle GBA}$

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\measuredangle AGB} = \frac{\overline{BG}}{\sin\measuredangle BAG}$$

Der Winkel $\measuredangle BAG = 70°$ ist bereits gegeben.

Zur Berechnung des Winkels $\measuredangle AGB$ wird das Dreieck ABG herangezogen:

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$\measuredangle AGB = 180° - \measuredangle BAG - \beta$
$\measuredangle AGB = 180° - 70° - 48,36°$
$\measuredangle AGB = 61,64°$

Nach Einsetzen der beiden Winkel $\measuredangle BAG = 70°$, $\measuredangle AGB = 61,64°$ und der Streckenlänge $\overline{AB} = 10$ cm ergibt sich:

$$\frac{10}{\sin 61,64°} = \frac{\overline{BG}}{\sin 70°} \qquad | \cdot \sin 70°$$

$$\overline{BG} = \frac{10 \cdot \sin 70°}{\sin 61,64°}$$

$\overline{BG} = 10,68$ cm

Mithilfe der Strecke $\overline{BG} = 10,68$ cm kann nun $\overline{CG}$ berechnet werden.

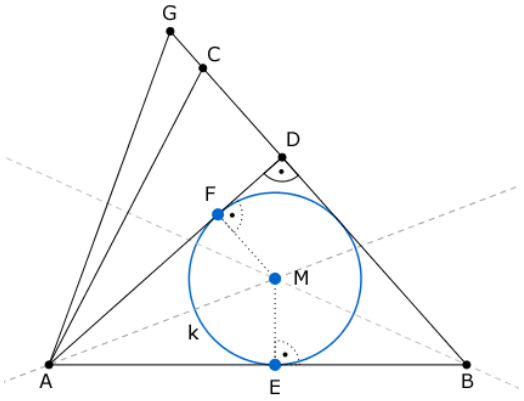
$\overline{CG} = \overline{BG} - \overline{BC} = 10,68 - 9,5 = 1,18$ cm

Aufgabe B2.4 (2 Punkte)

Im Dreieck ABD berührt der Inkreis k die Seite $[AB]$ im Punkt E und die Seite $[AD]$ im Punkt F.
Zeichnen Sie den Inkreis k mit seinem Mittelpunkt M und die Strecken $[ME]$ und $[MF]$ in die Zeichnung zu B 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Einzeichnen der Winkelhalbierenden des Winkel $\measuredangle BAG$.

2) Einzeichnen der Winkelhalbierenden des Winkels $\measuredangle GBA$.

3) Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden ergibt den Punkt M.

4) Einzeichnen des Punktes E, indem man das Lot vom Punkt M zur Strecke $[AB]$ fällt.

5) Einzeichnen des Punktes F, indem man das Lot vom Punkt M zur Strecke $[AD]$ fällt.

6) Zeichnen des Kreises k um den Punkt M mit Radius $r = \overline{ME}$.

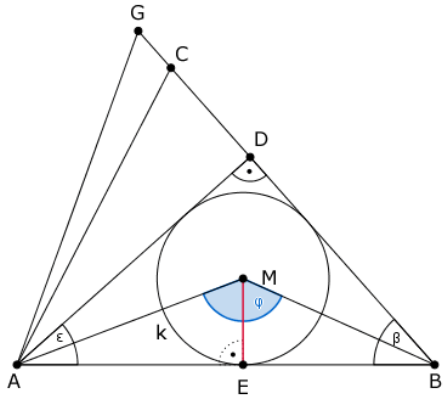
Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Maß φ des Winkels AMB und den Inkreisradius $r = \overline{ME}$.
[Ergebnisse: $\varphi = 135°, r = 2,06$ cm]

Lösung zu Aufgabe B2.5

© Realschulrep.de

Winkel bestimmen



Gegeben: $\beta = 48,36°$ und $\varepsilon = 41,64°$

Gesucht: $\measuredangle A\,M\,B = \varphi$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

Da sich der Inkreismittelpunkt eines Dreiecks als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ergibt, gilt im Dreieck $A\,B\,M$: $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180°$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta}{2} + \varphi = 180° \quad | \quad -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi = 180° - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\varphi = 180° - \frac{41,64°}{2} - \frac{48,36°}{2}$$

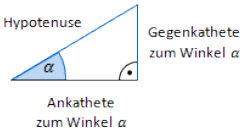
$$\varphi = 135°$$

Länge einer Strecke

Berechnung des Inkreisradius $r = \overline{M\,E}$:

Man betrachtet das rechtwinklige Dreieck $A\,E\,M$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

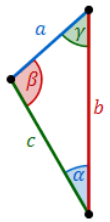
$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\overline{M\,E}}{\overline{A\,M}}$$

Um die Länge der Strecke $\overline{M\,E}$ bestimmten zu können muss als erstes die Streckenläng $\overline{A\,M}$ berechnet werden.

Im Dreieck $A\,B\,M$ gilt:

© Realschulrep.de

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck $A\,B\,M$ gilt somit: $\dfrac{\overline{A\,B}}{\sin\varphi} = \dfrac{\overline{A\,M}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \dfrac{\overline{B\,M}}{\sin\frac{\delta}{2}}$

$$\frac{\overline{A\,B}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{A\,M}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{10}{\sin 135^\circ} = \frac{\overline{A\,M}}{\sin\frac{48,36^\circ}{2}} \qquad | \quad \cdot\sin\frac{48,36^\circ}{2}$$

$$\overline{A\,M} = \frac{10\cdot\sin\frac{48,36^\circ}{2}}{\sin 135^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{A\,M} = 5,79 \text{ cm}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\overline{A\,M} = 5,79$ cm kann nun in $\sin\dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\overline{M\,E}}{\overline{A\,M}}$ eingesetzt werden um $\overline{M\,E}$ zu berechnen.

$$\sin\frac{41,64^\circ}{2} = \frac{\overline{M\,E}}{5,79} \quad | \cdot 5,79$$

$$\overline{M\,E} = \sin\frac{41,64^\circ}{2}\cdot 5,79$$

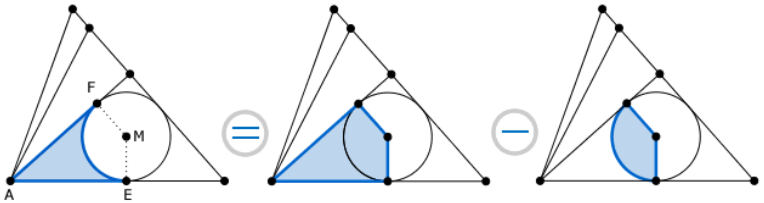
$$\Rightarrow \quad \overline{M\,E} = 2,06 \text{ cm}$$

Aufgabe B2.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt A des Flächenstücks $A\,E\,F$, das vom Kreisbogen $\overset{\frown}{F\,E}$ sowie von den Strecken $[E\,A]$ und $[A\,F]$ begrenzt wird.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Flächenberechnung



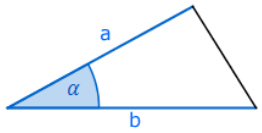
$$A_{A\,E\,F} = A_{A\,E\,M\,F} - A_{E\,M\,F}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Es gilt: $A_{A\,E\,M\,F} = 2\cdot A_{A\,M\,E}$, da die Dreiecke $A\,E\,M$ und $A\,M\,F$ kongruent sind.

$$A_{A\,E\,M\,F} = 2\cdot A_{A\,M\,E}$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck $A\,B\,C$ zwei Seiten a und b und der Winkel α, der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$A_{A\,E\,M\,F} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{A\,M} \cdot \overline{M\,E} \cdot \sin\measuredangle A\,M\,E$$

Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Dreiecks ist immer gleich $180°$.

$$\measuredangle A\,M\,E = 180° - 90° - \frac{\varepsilon}{2} = 90° - \frac{41,64°}{2} = 69,18°$$

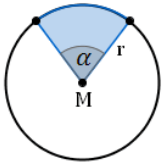
Damit ergibt sich:

$$A_{A\,E\,M\,F} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,79 \cdot 2,06 \cdot \sin 69,18°$$

$$A_{A\,E\,M\,F} = 11,14 \text{ cm}^2$$

Es folgt die Berechnung des Flächeninhaltes des Sekotrs $A_{E\,M\,F}$:

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Kreissektors*



Der Flächeninhalt A eines Kreissektors wird gemäß der Formel

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

berechnet.

$r^2 \cdot \pi$ ist der Flächeninhalt des ganzen Kreises.

$\frac{\alpha}{360°}$ gibt den Anteil des Kreissektors am ganzen Kreis an

$$A_{E\,M\,F} = \overline{M\,E}^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot \measuredangle A\,M\,E}{360°}$$

$$A_{E\,M\,F} = 2,06^2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot 69,18°}{360°}$$

$$A_{E\,M\,F} = 5,12 \text{ cm}^2$$

damit ergibt sich für die gesuchte Fläche:

$$A_{A\,E\,F} = A_{A\,E\,M\,F} - A_{E\,M\,F}$$

$$A_{A\,E\,F} = 11,14 \text{ cm}^2 - 5,12cm^2$$

$$A_{A\,E\,F} = 6,02 \text{ cm}^2$$

© Realschulrep.de