

Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe A2

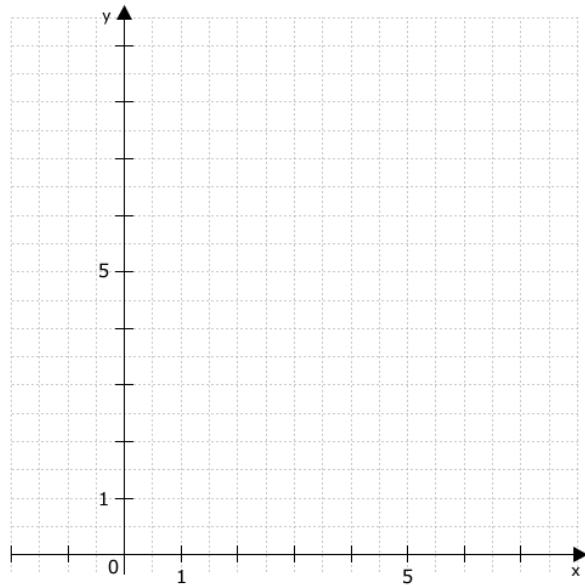
Aufgabe A2.

Die Punkte $A(-0,5|1)$ und $B(3,5|1)$ legen zusammen mit Pfeilen $\overrightarrow{AC_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix}$ für $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ[$ Dreiecke ABC_n fest.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile für $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 40^\circ$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 80^\circ$.
Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 in das Koordinatensystem ein.



Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ gilt: $C_n \left(8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$.

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Trägergraphen der Punkte C_n .

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken ABC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck ABC_3 mit der Basis $[AB]$.

Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß φ und begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck ABC_3 nicht gleichseitig ist.

Lösung

Aufgabe A2.

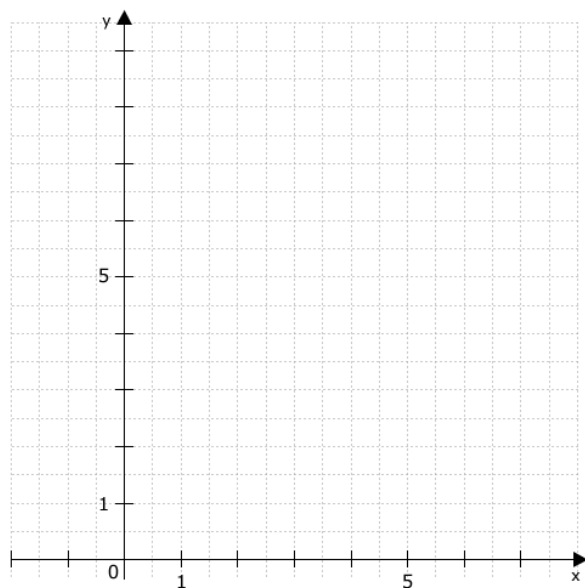
Die Punkte $A(-0,5|1)$ und $B(3,5|1)$ legen zusammen mit Pfeilen $\overrightarrow{AC_n}(\varphi) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix}$

für $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ[$ Dreiecke ABC_n fest.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A2.1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Pfeile für $\overrightarrow{AC_1}$ für $\varphi = 40^\circ$ und $\overrightarrow{AC_2}$ für $\varphi = 80^\circ$.
Zeichnen Sie anschließend die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 in das Koordinatensystem ein.



Lösung zu Aufgabe A2.1

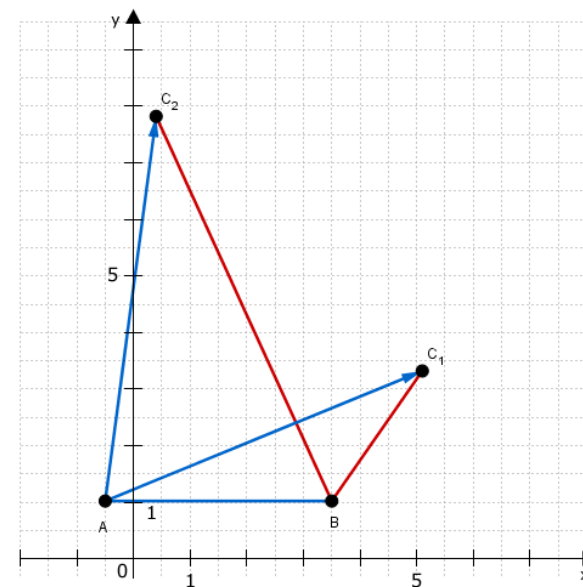
Vektor bestimmen

Für $\varphi = 40^\circ$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{AC_n}(40^\circ) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos 40^\circ - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 40^\circ} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,6 \\ 2,3 \end{pmatrix}$$

Für $\varphi = 80^\circ$ ergibt sich:

$$\overrightarrow{AC_n}(80^\circ) = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos 80^\circ - 0,5 \\ \frac{1}{\cos 80^\circ} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \\ 6,8 \end{pmatrix}$$



Erläuterung: *Einzeichnen*

Anfertigung der Skizze:

- 1) Einzeichnen des Punktes $A(-0,5|1)$
- 2) Einzeichnen des Punktes $B(3,5|1)$
- 3) Antragen des Vektors \vec{AC}_1 , um den Punkt C_1 zu finden
- 4) Um den Punkt C_2 zu finden, wird der Vektor \vec{AC}_2 angetragen
- 5) Verbinden der Punkte zu Dreiecken ABC_1 und ABC_2

Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Punkte C_n in Abhängigkeit von φ gilt: $C_n \left(8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Lage eines Punktes

$$\vec{AC}_n = \vec{C}_n - \vec{A} \quad | + \vec{A}$$

Erläuterung: *Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors \vec{AB} mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

In unserem Fall kann aus dem Vektor \vec{AC}_n der Fußpunkt des Vektors C_n berechnet werden.

$$\vec{C}_n = \vec{AC}_n + \vec{A}$$

$$\vec{C}_n = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot \cos \varphi - 1 \\ \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \end{pmatrix}$$

Darstellung in Punktschreibweise: $C_n \left(8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$

Aufgabe A2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Trägergraphen der Punkte C_n .

Lösung zu Aufgabe A2.3

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$\text{Gegeben: } C_n \left(8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$$

Gesucht: Trägergraph

Erläuterung: *Trägergraphen*

Trägergraphen werden bestimmt, indem die Koordinaten der Punkte C_n unabhängig vom Winkel φ dargestellt werden.

Hierzu wird die x -Koordinate des Punktes C_n nach $\cos \varphi$ aufgelöst und anschließend in der y -Koordinate $\cos \varphi$ durch den berechneten Term ersetzt.

$$x' = 8 \cdot \cos \varphi - 1 \quad | + 1$$

$$x' + 1 = 8 \cdot \cos \varphi \quad | : 8$$

$$\frac{x' + 1}{8} = \cos \varphi$$

y -Koordinate von C_n :

$$y' = \frac{1}{\cos \varphi} + 2$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x'+1}{8}} + 2$$

Erläuterung: *Doppelbruch*

Brüche der Form $\frac{1}{\frac{a}{b}}$ können als $\frac{b}{a}$ dargestellt werden.

$$\text{Denn } \frac{1}{\frac{a}{b}} = 1 : \frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

$$y = \frac{8}{x+1} + 2$$

$$\Rightarrow t : y = \frac{8}{x+1} + 2$$

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Unter den Dreiecken ABC_n gibt es das gleichschenklige Dreieck ABC_3 mit der Basis $[AB]$.

Ermitteln Sie das zugehörige Winkelmaß φ und begründen Sie durch Rechnung, dass das Dreieck ABC_3 nicht gleichseitig ist.

Lösung zu Aufgabe A2.4**Winkel bestimmen**

Gegeben: $A(-0,5|1)$, $B(3,5|1)$ und $C_n \left(8 \cdot \cos \varphi - 1 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 2 \right)$
 Gesucht: C_3

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel $M_{[AB]} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Da die Strecke $[AB]$ Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC_3 muss x_{C_3} genau die Mitte der Strecke $[AB]$ sein.

$$x_{C_3} = \frac{-0,5 + 3,5}{2} = 1,5$$

Erläuterung: *Gleichsetzen*

Da $x_{C_3} = 1,5$ die Punkte C_n aber in Abhängigkeit von φ mit $x_{C_n} = 8 \cdot \cos \varphi - 1$ berechnet werden, müssen die beiden Ausdrücke gleichgesetzt werden.

$$\text{Es gilt: } 8 \cdot \cos \varphi - 1 = 1,5$$

$$8 \cdot \cos \varphi - 1 = 1,5 \quad | + 1$$

$$8 \cdot \cos \varphi = 2,5 \quad | : 8$$

$$\cos \varphi = 0,3125$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0,3125) = 71,8^\circ$$

Seite eines Dreiecks bestimmen

Nun werden die Seitenlängen des Dreiecks ABC_3 berechnet.

Gegeben: $\overrightarrow{AC_n} = \left(8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right)$

$$|\overrightarrow{AB}| = x_B - x_A = 4 \text{ LE}$$

Erläuterung: *Einsetzen*

$\overrightarrow{AC_3}$ ergibt sich, indem $\varphi = 71,8^\circ$ in $\overrightarrow{AC_n} = \left(8 \cdot \cos \varphi - 0,5 \mid \frac{1}{\cos \varphi} + 1 \right)$ eingesetzt wird.

$$\overrightarrow{AC_3} = \left(8 \cdot \cos 71,8^\circ - 0,5 \mid \frac{1}{\cos 71,8^\circ} + 1 \right)$$

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge eines Vektors \vec{v} mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird mit der folgenden Formel berechnet:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\overrightarrow{AC_3}| = \sqrt{(8 \cdot \cos 71,8^\circ - 0,5)^2 + \left(\frac{1}{\cos 71,8^\circ} + 1 \right)^2}$$

$$|\overrightarrow{AC_3}| = 4,7 \text{ LE}$$

Die Länge der Basis $[AB]$ des gleichschenkligen Dreiecks ist also nicht längengleich zu der Länge des Schenkels $[AC_3]$, da $4 \text{ LE} \neq 4,7 \text{ LE}$.