

## Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe B1

### Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion  $f_1$  mit der Gleichung  $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$  mit  $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

#### Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f_1$  an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f_1$  für  $x \in [1, 5; 11]$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-1 \leq x \leq 12$ ;  $-6 \leq y \leq 6$

#### Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f_1$  wird durch Achsenspiegelung an der x-Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor  $\vec{v}$  auf den Graphen der Funktion  $f_2$  mit der Gleichung  $y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$  ( $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) abgebildet.

Geben Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors  $\vec{v}$  an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f_2$  für  $x \in [1, 5; 11]$  in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

#### Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Punkte  $A_n$  ( $x | 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ ) auf dem Graphen zu  $f_2$  haben dieselbe Abszisse  $x$  wie Punkte  $C_n$  ( $x | -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ ) auf dem Graphen zu  $f_1$ . Sie sind für  $x > 1,62$  zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $D_n$  die Eckpunkte von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .

Es gilt:  $\overline{B_n D_n} = 6$  LE.

Zeichnen Sie die Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 2,5$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 8,5$  in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken  $[A_n C_n]$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:  $\overline{A_n C_n}(x) = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x)$  LE.

#### Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Die Raute  $A_3 B_3 C_3 D_3$  ist ein Quadrat. Berechnen Sie die zugehörige  $x$ -Koordinate des Punktes  $A_3$ . Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

#### Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalschnittpunkte  $M_n$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:

$$M_n \left( x \mid 0,75 \cdot \log 0,5 \left( \frac{x}{x-1} \right) \right).$$

### Aufgabe B1.6 (2 Punkte)

Geben Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte  $D_n$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  an.

## Lösung

### Aufgabe B1.

Gegeben ist die Funktion  $f_1$  mit der Gleichung  $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$  mit  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

### Aufgabe B1.1 (4 Punkte)

Geben Sie die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion  $f_1$  an und zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f_1$  für  $x \in [1, 5; 11]$  in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm;  $-1 \leq x \leq 12$ ;  $-6 \leq y \leq 6$

### Lösung zu Aufgabe B1.1

#### Definitionsbereich bestimmen

$$f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$$

Erläuterung: *Definitionsbereich der Logarithmusfunktion*

Die Logarithmusfunktion  $y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$  ist nur für positive Werte definiert. Man untersucht somit für welche  $x$ -Werte gilt:  $x - 1 > 0$ .

$$x - 1 > 0 \quad | + 1$$

$$x > 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{D} = ]1; \infty[$$

#### Wertemenge einer Funktion

Die Wertemenge jeder Logarithmusfunktion besteht aus allen reellen Zahlen.

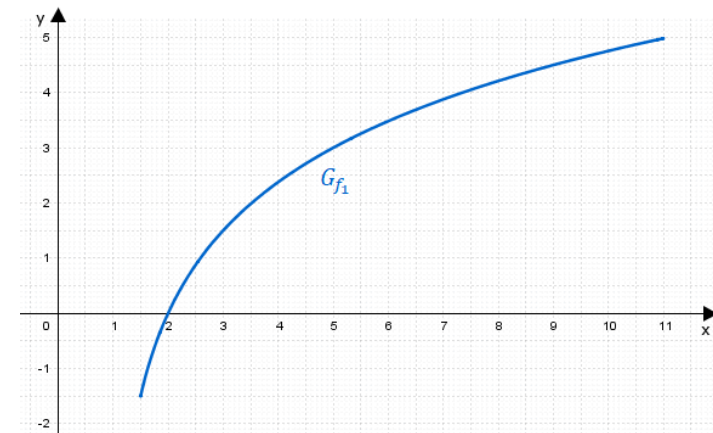
$$\Rightarrow \mathbb{W}_f = \mathbb{R}$$

#### Skizze

$f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$  wird für  $x \in [1, 5; 11]$  in ein Koordinatensystem gezeichnet.

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Erstellen einer Werteballe mit Hilfe des Taschenrechners für  $x \in [1, 5; 11]$
- 2) Einzeichnen der Punkte und verbinden der Punkte zum Graphen der Funktion  $f_1$



### Aufgabe B1.2 (3 Punkte)

Der Graph der Funktion  $f_1$  wird durch Achsenspiegelung an der  $x$ -Achse und anschließende Parallelverschiebung mit dem Vektor  $\vec{v}$  auf den Graphen der Funktion  $f_2$  mit der Gleichung  $y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$  ( $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ) abgebildet.

Geben Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors  $\vec{v}$  an und zeichnen Sie sodann den Graphen zu  $f_2$  für  $x \in [1, 5; 11]$  in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein.

### Lösung zu Aufgabe B1.2

#### Vektor bestimmen

Gegeben:  $f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$  und  $f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$

Gesucht:  $\vec{v}$

Das Nachvollziehen des Übergangs der Funktion  $f_1(x)$  auf die Funktion  $f_2(x)$  liefert den Verschiebungsvektor  $\vec{v}$ .

Erläuterung: *Spiegelung von Funktionsgraphen, Verschiebung von Funktionsgraphen*

Wird die Funktion  $f_1 : y = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$  an der  $x$ -Achse gespiegelt, so gilt:

$$f^*(x) = -1 \cdot f_1(x) = -1 \cdot (-1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)) = 1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$$

Eine Vektorverschiebung der Funktion  $f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$  um den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  würde folgende Funktion ergeben:

$$f'(x) = 1,5 \cdot \log_{0,5}(x + a) + b$$

Durch Vergleich der Funktionen  $f^*(x)$  und  $f'(x)$  lässt sich erkennen, dass  $a = -1$  und  $b = 0$ .

Somit lautet der Verschiebungsvektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

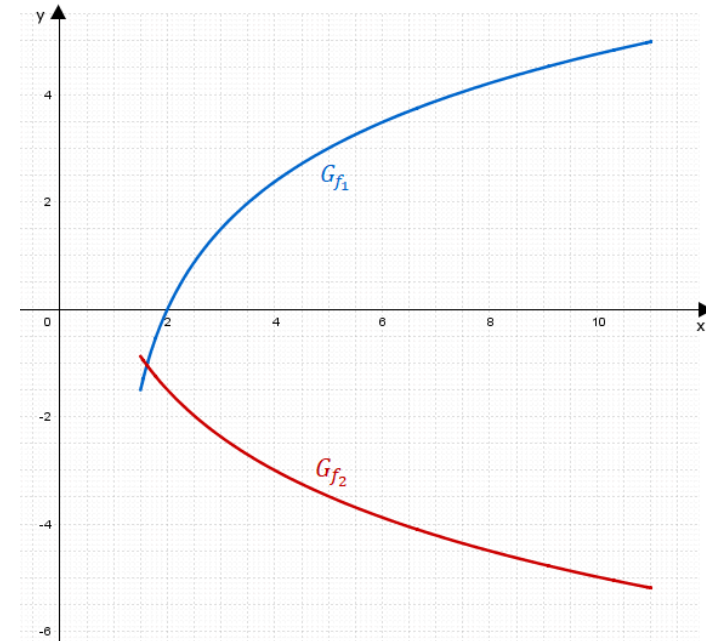
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Skizze**

$f_2 : y = 1,5 \cdot \log_{0,5} x$  wird ebenfalls für  $x \in [1,5; 11]$  in ein Koordinatensystem gezeichnet.

Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) Erstellen einer Werteballe mit Hilfe des Taschenrechners für  $x \in [1,5; 11]$
- 2) Einzeichnen der Punkte und verbinden der Punkte zum Graphen der Funktion  $f_2$



### Aufgabe B1.3 (4 Punkte)

Punkte  $A_n$  ( $x | 1,5 \cdot \log_{0,5} x$ ) auf dem Graphen zu  $f_2$  haben dieselbe Abszisse  $x$  wie Punkte  $C_n$  ( $x | -1,5 \cdot \log_{0,5}(x - 1)$ ) auf dem Graphen zu  $f_1$ . Sie sind für  $x > 1,62$  zusammen mit Punkten  $B_n$  und  $D_n$  die Eckpunkte von Rauten  $A_n B_n C_n D_n$ .

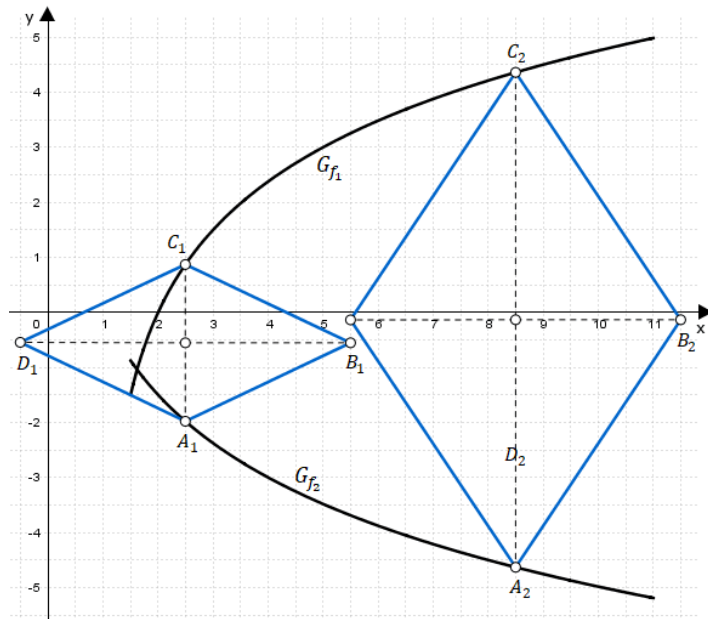
Es gilt:  $\overline{B_n D_n} = 6$  LE.

Zeichnen Sie die Rauten  $A_1 B_1 C_1 D_1$  für  $x = 2,5$  und  $A_2 B_2 C_2 D_2$  für  $x = 8,5$  in das Koordinatensystem zu B.1.1 ein.

Zeigen Sie sodann, dass für die Länge der Strecken  $[A_n C_n]$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:  $\overline{A_n C_n}(x) = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x)$  LE.

### Lösung zu Aufgabe B1.3

**Skizze**



Erläuterung: *Einzeichnen*

- 1) man geht auf der  $x$ -Achse zu  $x = 2,5$  und dann nach oben bis man auf den Graphen der Funktion  $f_1$  stößt. Hier liegt der Punkt  $C_1$ .
- 2) man geht auf der  $x$ -Achse zu  $x = 2,5$  und dann nach unten bis man auf den Graphen der Funktion  $f_2$  stößt. Hier liegt der Punkt  $A_1$ .
- 3) Vom Mittelpunkt der Strecke  $[A_1 C_1]$  gehe man 3 LE nach rechts und links. Hier befinden sich die Punkte  $B_1$  und  $D_1$ .

Konstruktion der Raute  $A_2 B_2 C_2 D_2$  erfolgt analog.

### Länge einer Strecke

Die Strecken  $[A_n C_n]$  verlaufen parallel zur  $y$ - Achse. Es gilt:

$$\overline{A_n C_n} = y_{C_n} - y_{A_n}$$

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1) - 1,5 \cdot \log_{0,5} x$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term  $-1,5$  wird ausgeklammert.

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot (\log_{0,5}(x-1) + \log_{0,5} x)$$

Erläuterung: *Logarithmus einer Summe*

$$\log_a s + \log_a t = \log_a (s \cdot t)$$

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot (\log_{0,5}(x-1) \cdot x)$$

$$\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot (\log_{0,5}(x^2 - x))$$

$$\Rightarrow \overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) \text{ LE}$$

### Aufgabe B1.4 (2 Punkte)

Die Raute  $A_3 B_3 C_3 D_3$  ist ein Quadrat. Berechnen Sie die zugehörige  $x$ -Koordinate des Punktes  $A_3$ . Runden Sie dabei auf zwei Stellen nach dem Komma.

### Lösung zu Aufgabe B1.4

#### Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben:  $\overline{B_n D_n} = 6 \text{ LE}$  und  $\overline{A_n C_n} = -1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) \text{ LE}$

Gesucht:  $\overline{A_3 C_3}$

Erläuterung: *Eigenschaften eines Quadrats*

In einem Quadrat sind die Längen der Diagonalen gleich lang.

In unserem Fall gilt also:

$$\overline{B_3 D_3} = \overline{A_3 C_3} \text{ und somit } \overline{A_3 C_3} = 6 \text{ LE.}$$

$$-1,5 \cdot \log_{0,5}(x^2 - x) = 6 \mid : (-1,5)$$

$$\log_{0,5}(x^2 - x) = -4 \quad | \text{entlogarithmieren}$$

Erläuterung: *Entlogarithmieren*

Der Logarithmus  $\log_{0,5}$  kann durch die Exponentialfunktion  $0,5^x$  aufgehoben werden.

$$\text{Beispiel: } \log_{0,5} x = 1 \iff 0,5^{\log_{0,5} x} = 0,5^1 \iff x = 0,5$$

$$x^2 - x = 0,5^{-4}$$

$$x^2 - x = 16 \quad | -16$$

$$x^2 - x - 16 = 0 \quad | \text{Mitternachtsformel anwenden}$$

Erläuterung: *Mitternachtsformel - Lösungsformel für quadratische Gleichungen*

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$$x_1 \approx 4,53 \quad \text{und} \quad (x_2 \approx -3,53) \text{ da } x > 1,62$$

$$\Rightarrow x_{A_3} = 4,53$$

#### Aufgabe B1.5 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Koordinaten der Diagonalschnittpunkte  $M_n$  der Rauten  $A_n B_n C_n D_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse  $x$  der Punkte  $A_n$  gilt:

$$M_n \left( x \mid 0,75 \cdot \log_{0,5} \left( \frac{x}{x-1} \right) \right).$$

#### Lösung zu Aufgabe B1.5

##### **Koordinaten von Punkten ermitteln**

Gegeben:  $A_n (x \mid 1,5 \cdot \log_{0,5} x)$  und  $C_n (x \mid -1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1))$

Gesucht: Diagonalschnittpunkte  $M_n$

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke  $[AB]$  mit den Punkten  $A(x_A \mid y_A)$  und  $B(x_B \mid y_B)$  berechnet sich mit der Formel:

$$M_{[AB]} = \left( \frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$M_n = \left( \frac{x + x}{2} \mid \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2} \right)$$

$$M_n = \left( \frac{2x}{2} \mid \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2} \right)$$

$$M_n = \left( x \mid \frac{1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)}{2} \right)$$

Erläuterung: *Rechenweg*

Da im Term  $1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1)$  in beiden Summanden der Faktor  $1,5$  vorkommt, wird er ausgeklammert. Somit gilt:

$$1,5 \cdot \log_{0,5} x - 1,5 \cdot \log_{0,5}(x-1) = 1,5 \cdot (\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1))$$

$$M_n = \left( x \mid \frac{1,5 \cdot (\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1))}{2} \right)$$

$$M_n = (x \mid 0,75 \cdot (\log_{0,5} x - \log_{0,5}(x-1)))$$



Somit hat der Trägergraph die Gleichung  $y = 0,75 \cdot \log_{0,5} \left( \frac{x+3}{x+2} \right)$ .