Mittlere-Reife-Prüfung 2017 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ des Drachenvierecks $ABCD$ schneiden sich im Punkt K.
Das Drachenviereck $ABCD$ ist die Grundfläche des geraden Prismas $ABCDEFGH$.
Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A.
Es gilt:
$\overline{AC} = 12$ cm; $\overline{BD} = 10$ cm; $\overline{AK} = 4$ cm; $\overline{AE} = 6$ cm.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung: $p = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Die Strecken $[EG]$ und $[FH]$ und schneiden sich im Punkt L.
Berechnen Sie das Maß des Winkels LCK. [Ergebnis: $\measuredangle LCK = 36{,}87°$]

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[LC]$. Die Winkel CKP_n haben das Maß mit $\varphi \in]0°, 90°[$.
Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte gleichschenkliger Dreiecke BDP_n mit der Basis $[BD]$.
Zeichnen Sie das Dreieck BDP_1 sowie die Strecke $[KP_1]$ für $\varphi = 78°$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Begründen Sie sodann, dass keines der Dreiecke BDP_n gleichseitig ist.

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[KP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{KP_n}(\varphi) = \dfrac{4{,}80}{\sin(\varphi + 36{,}87°)}$ cm.
Die Länge der Strecke $[KP_0]$ ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für φ an.

Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $ABCDP_n$ mit der Grundfläche $ABCD$ und den Höhen $[P_nQ_n]$. Die Punkte Q_n liegen auf der Strecke $[KC]$.
Zeichnen Sie die Pyramide $ABCDP_1$ und die Höhe $[P_1Q_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen V der Pyramiden $ABCDP_n$ in Abhängigkeit von φ.

$$\left[\text{Ergebnis: } V(\varphi) = \frac{96 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 36{,}87°)} \text{ cm}^3\right]$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $ABCDP_2$ beträgt 96 cm^3.
Berechnen Sie das zugehörige Maß für φ.

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Volumina der Pyramiden $ABDP_n$ mit der Grundfläche ABD und der Pyramiden $BCDP_n$ mit der Grundfläche BCD stets im Verhältnis 1 : 2 stehen.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ des Drachenvierecks $ABCD$ schneiden sich im Punkt K.
Das Drachenviereck $ABCD$ ist die Grundfläche des geraden Prismas $ABCDEFGH$.
Der Punkt E liegt senkrecht über dem Punkt A.
Es gilt:
$\overline{AC} = 12$ cm; $\overline{BD} = 10$ cm; $\overline{AK} = 4$ cm; $\overline{AE} = 6$ cm.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (3 Punkte)

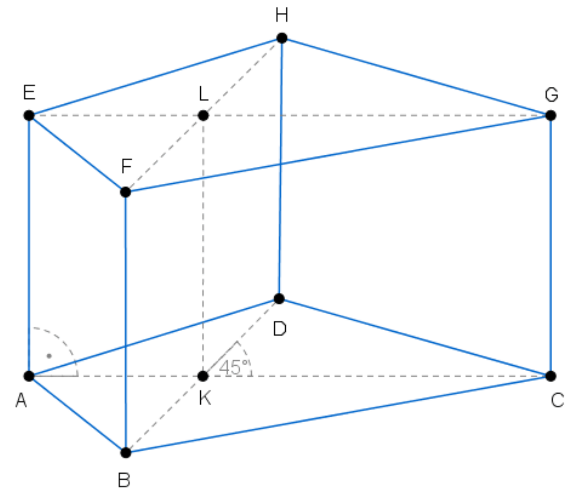
Zeichnen Sie das Schrägbild des Prismas $ABCDEFGH$, wobei $[AC]$ auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt C liegen soll.
Für die Zeichnung: $p = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$
Die Strecken $[EG]$ und $[FH]$ und schneiden sich im Punkt L.
Berechnen Sie das Maß des Winkels LCK. [Ergebnis: $\measuredangle LCK = 36{,}87°$]

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze

Gegeben: $\overline{AC} = 12$ cm; $\overline{BD} = 10$ cm; $\overline{AK} = 4$ cm; $\overline{AE} = 6$ cm

Einzeichnen des Prismas $ABCDEFGH$



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) $[AC]$ mit $\overline{AC} = 12$ cm einzeichnen.

2) Punkt K mit $\overline{AK} = 4$ cm antragen.

3) $[BD]$ durch den Punkt K im Winkel von $45°$ einzeichnen.
Für die Zeichnung: $\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$

4) Drachen $ABCD$ verbinden.

5) $[AE]$ mit $\overline{AE} = 6$ cm einzeichnen.

6) Weitere Kanten $[BF]$, $[CG]$ und $[DH]$ mit Höhe von 6 cm einzeichnen.

7) Deckfläche und Prisma verbinden.

8) Diagonalen $[FH]$ und $[EG]$ einzeichnen und den Digonalenschnittpunkt L benennen.

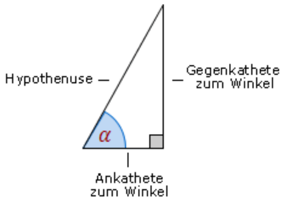
Winkel bestimmen

Man betrachte das rechtwinklige Dreieck $K\,C\,L$.

Gegeben: $\overline{K\,L} = 6$ cm und $\overline{K\,C} = \overline{A\,C} - \overline{A\,K} = 12 - 4 = 8$ cm

Gesucht: $\measuredangle L\,C\,K$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\measuredangle L\,C\,K = \frac{\overline{K\,L}}{\overline{K\,C}}$$

$$\tan\measuredangle L\,C\,K = \frac{6}{8} \quad |\tan^{-1}$$

$$\measuredangle L\,C\,K = 36,87^\circ$$

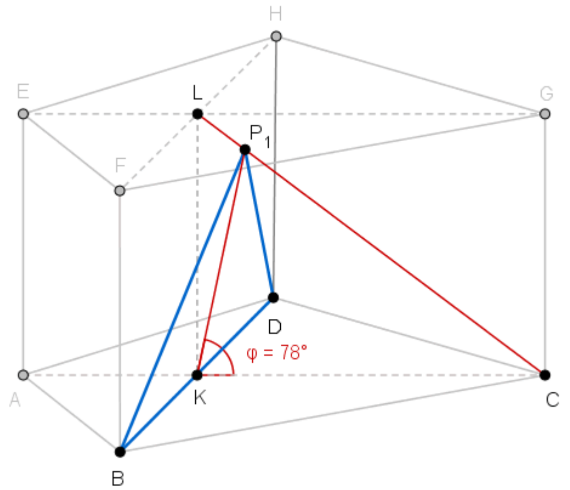
Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[L\,C]$. Die Winkel $C\,K\,P_n$ haben das Maß mit $\varphi \in\,]0^\circ, 90^\circ]$. Die Punkte P_n sind zusammen mit den Punkten B und D die Eckpunkte gleichschenkliger Dreiecke $B\,D\,P_n$ mit der Basis $[B\,D]$.
Zeichnen Sie das Dreieck $B\,D\,P_1$ sowie die Strecke $[K\,P_1]$ für $\varphi = 78^\circ$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Begründen Sie sodann, dass keines der Dreiecke $B\,D\,P_n$ gleichseitig ist.

Lösung zu Aufgabe B2.2

Skizze

Einzeichnen des Dreiecks $B\,D\,P_1$ sowie der Strecke $[K\,P_1]$:



Erläuterung: *Einzeichnen*

1) Antragen des Winkels $\varphi = 78^\circ$ am Punkt K.

2) Einzeichnen des Punktes P_1. Der Punkt P_1 ergibt sich als Schnittpunkt des Schenkels des Winkel φ und der der Strecke $[L\,C]$.

3) Verbinden der Punkte D, B und P_1 zum Dreieck $D\,B\,P_1$.

4) Einzeichen der Strecke $[K\,P_1]$.

Länge einer Strecke

Begründung, dass keines der Dreiecke $B\,D\,P_n$ gleichseitig ist.

Gegeben: $\overline{B\,D} = 10$ cm (Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks)

Falls eines der Dreiecke gleichseitig wäre dann müsste die Höhe $h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3}$ cm $\approx 8,66$ cm betragen.

Erläuterung: *Höhe eines gleichseitigen Dreiecks*

Die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a berechnet man mit folgender Formel:

$h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$

In unserem Fall ist die Länge der Basis $\overline{BD} = 10$ cm.
Damit ergibt sich $h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3}$ cm

Da die Punkte $P_n \in [LC]$ gilt: $\overline{KP}_{max} < 8$ cm

Erläuterung: *Erläuterung*

Die Punkte P_n hätten den größten Abstand vom Punkt K wenn sie mit dem Punkt C zusammenfallen. Da $\overline{KC} = 8$ cm ist aber $\varphi \neq 0°$ folgt also $\overline{KP}_{max} < 8$ cm.

$\overline{KP}_{max} = 8 \text{ cm} \neq h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} \text{ cm} \approx 8,66 \text{ cm}$

$\Rightarrow$ die Dreiecke BDP_n sind nicht gleichseitig

Aufgabe B2.3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[KP_n]$ in Abhängigkeit von φ gilt:
$\overline{KP_n}(\varphi) = \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87°)}$ cm.
Die Länge der Strecke $[KP_0]$ ist minimal. Geben Sie den zugehörigen Wert für φ an.

Lösung zu Aufgabe B2.3

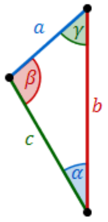
Länge einer Strecke

Gegeben: $\overline{KC} = 8$ cm und $\measuredangle LCK = 36,87°$

Gesucht: $\overline{KP_n}(\varphi)$

Man betrachte das Dreieck KCP_n.

Erläuterung: *Sinussatz*



In jedem Dreieck haben die Quotienten aus der Länge einer Seite und dem Sinuswert ihres Gegenwinkels denselben Wert. Es gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Anders formuliert:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \qquad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Im Dreieck KCP_n gilt somit: $\frac{\overline{KP_n}}{\overline{KC}} = \frac{\sin\measuredangle LCK}{\sin\measuredangle KP_nC}$

$$\frac{\overline{KP_n}}{\overline{KC}} = \frac{\sin\measuredangle LCK}{\sin\measuredangle KP_nC}$$

$$\frac{\overline{KP_n}}{8} = \frac{\sin 36,87°}{\sin\,(180° - (\varphi + 36,87°))} \quad |\cdot 8$$

$$\overline{KP_n} = \frac{8 \cdot \sin 36,87°}{\sin\,(180° - (\varphi + 36,87°))}$$

$$\overline{KP_n} = \frac{4,80}{\sin\,(180° - (\varphi + 36,87°))}$$

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*

$\sin\,(180° - \alpha) = \sin\alpha$

Hier: $\sin\left(180° - \underbrace{(\varphi + 36{,}87°)}_{\alpha}\right) = \sin\,(\varphi + 36{,}87°)$

$$\overline{K\,P_n} = \frac{4{,}80}{\sin\,(\varphi + 36{,}87°)}\ \text{cm}$$

Nun soll der Winkel φ angegeben werden, für den die Strecke $[K\,P_0]$ minimal ist.

Gegeben: $\overline{K\,P_n} = \dfrac{4{,}80}{\sin\,(\varphi + 36{,}87°)}\ \text{cm}$

Erläuterung:

Die Strecke $\overline{K\,P_n}$ besteht aus einem Quotienten. Ein Quotient wird minimal, wenn der Nenner maximal wird.

Hier muss also der Quotient $\dfrac{4{,}80}{\sin\,(\varphi + 36{,}87°)}$ den kleinstmöglichen Wert annehmen. Dies ist der Fall, wenn der Sinus im Nenner maximal wird. Der größte Wert den der Sinus annehmen kann ist 1. Dies ist der Fall für $+90°$.

$90° = \varphi_0 + 36{,}87° \quad | - 36{,}87$
$\varphi_0 = 53{,}13°$

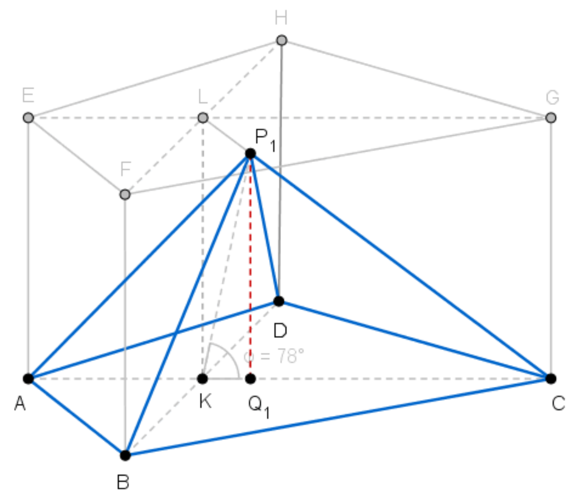
Aufgabe B2.4 (3 Punkte)

Die Punkte P_n sind die Spitzen von Pyramiden $A\,B\,C\,D\,P_n$ mit der Grundfläche $A\,B\,C\,D$ und den Höhen $[P_n\,Q_n]$. Die Punkte Q_n liegen auf der Strecke $[K\,C]$.
Zeichnen Sie die Pyramide $A\,B\,C\,D\,P_1$ und die Höhe $[P_1\,Q_1]$ in das Schrägbild zu B 2.1 ein.
Ermitteln Sie sodann durch Rechnung das Volumen V der Pyramiden $A\,B\,C\,D\,P_n$ in Abhängigkeit von φ.

$\left[\text{Ergebnis: } V\,(\varphi) = \dfrac{96 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 36{,}87°)}\ \text{cm}^3\right]$

Lösung zu Aufgabe B2.4

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

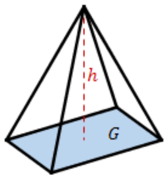
1) Verbinden der Punkte P_1 und A zur Strecke $[P_1\,A]$

2) Einzeichnen der Höhe $[P_1\,Q_1]$ indem vom Punkt P_1 das Lot zur Strecke $[K\,C]$ gefällt wird.

Volumen einer Pyramide

Gegeben: $\overline{A\,C} = 12$ cm, $\overline{B\,D} = 10$ cm und $\overline{K\,P_n}\ (\varphi) = \dfrac{4{,}80}{\sin(\varphi + 36{,}87°)}$ cm

Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Drachenvierecks*

Ein Drachenviereck mit den Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

Die Grundfläche G ist das Drachenviereck $A\,B\,C\,D$.

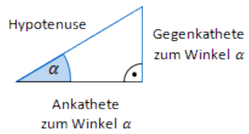
$$G = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot h$$

$h = \overline{P_n\,Q_n}$. Zur Berechnung der Streckenlänge $\overline{P_n\,Q_n}$ betrachtet man das Dreieck $K\,P_n\,Q_n$.

Erläuterung: *Sinus eines Winkels*



Der Sinus eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\sin\varphi = \frac{\overline{P_n\,Q_n}}{\overline{K\,P_n}} \quad | \cdot \overline{K\,P_n}$$

$$\overline{P_n\,Q_n} = \sin\varphi \cdot \overline{K\,P_n}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin\varphi \cdot \overline{K\,P_n}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin\varphi \cdot \frac{4,80}{\sin(\varphi + 36,87°)}$$

$$\Rightarrow V = \frac{96 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 36,87°)} \text{ cm}^3$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Das Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,P_2$ beträgt 96 cm^3.
Berechnen Sie das zugehörige Maß für φ.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Winkel bestimmen

Gegeben: $V = \frac{96 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 36,87°)}$ cm^3

Somit gilt für das Volumen der Pyramide $A\,B\,C\,D\,P_2$:

$\frac{96 \cdot \sin\varphi}{\sin(\varphi + 36,87°)} = 96 | : 96$

$\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + 36,87°)} = 1 | \cdot \sin(\varphi + 36,87°)$

$\sin(\varphi + 36,87°) = \sin\varphi |$ Additionstheorem anwenden

> Erläuterung: *Additionstheorem*
>
> $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin\varphi \cdot \cos 36,87° + \cos\varphi \cdot \sin 36,87° = \sin\varphi | - \cos\varphi \cdot \sin 36,87°$

$\sin\varphi \cdot \cos 36,87° = \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \sin 36,87° | - \sin$

$\sin\varphi \cdot \cos 36,87° - \sin\varphi = -\cos\varphi \cdot \sin 36,87° |$ Ausklammern

> Erläuterung: *Ausklammern*
>
> Der gemeinsame Term $\sin\varphi$ wird auf der linken Seite der Gleichung ausgeklammert.

$\sin\varphi \cdot (\cos 36,87° - 1) = -\cos\varphi \cdot \sin 36,87°$

$\sin\varphi \cdot (\cos 36,87° - 1) = -\cos\varphi \cdot \sin 36,87° | : \cos\varphi$

$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} (\cos 36,87° - 1) = -\sin 36,87° | : (\cos 36,87° - 1)$

$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-\sin 36,87°}{(\cos 36,87° - 1)} |$ Tangens anwenden

> Erläuterung: *Tangens eines Winkels*
>
> Für den Tangens eines Winkels α gilt die Beziehung:
>
> $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan\varphi = \frac{-\sin 36,87°}{(\cos 36,87° - 1)} | \tan^{-1}\varphi$

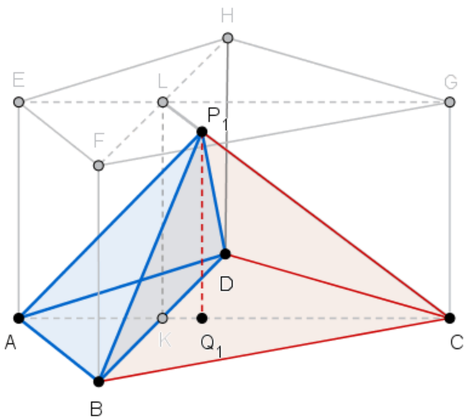
$\varphi = 71,57°$

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass die Volumina der Pyramiden $ABDP_n$ mit der Grundfläche ABD und der Pyramiden $BCDP_n$ mit der Grundfläche BCD stets im Verhältnis 1 : 2 stehen.

Lösung zu Aufgabe B2.6

Volumen der Teilkörper



Gegeben: $\overline{BD} = 10$ cm, $\overline{AK} = 4$ cm und $\overline{KC} = 8$ cm

$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h}$

> Erläuterung: *Erläuterung*
>
> Die Pyramide V_{ABDP_n} und die Pyramide V_{BCDP_n} haben jeweils dieselbe Höhe h.

$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{G_1}{G_2}$

$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AK}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{KC}}$

$\frac{V_{ABDP_n}}{V_{BCDP_n}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4}{\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8}$

$$\frac{V_{A\,B\,D\,P_n}}{V_{B\,C\,D\,P_n}} = \frac{1}{2}$$