

Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik II Aufgabe A3

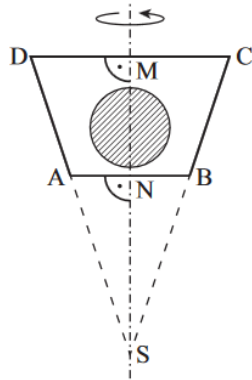
Aufgabe A3.

Die untenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt ABCD eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse MS .

Dieser Körper dient als Muster zur Herstellung einer Praline.

Die Praline besteht aus Schokolade und einer kugelförmigen Cremefüllung. Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89%.

Es gilt: $\overline{MS} = 5$ cm; $\overline{MN} = 2$ cm; $\angle ADM = 71,6^\circ$



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Strecken $[MD]$ und $[AN]$ gilt: $\overline{MD} = 1,7$ cm und $\overline{AN} = 1,0$ cm.

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Cremefüllung.

Lösung

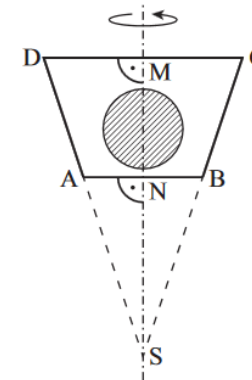
Aufgabe A3.

Die untenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt ABCD eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse MS .

Dieser Körper dient als Muster zur Herstellung einer Praline.

Die Praline besteht aus Schokolade und einer kugelförmigen Cremefüllung. Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89%.

Es gilt: $\overline{MS} = 5$ cm; $\overline{MN} = 2$ cm; $\angle ADM = 71,6^\circ$



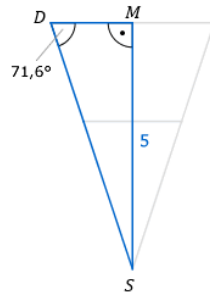
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Strecken $[MD]$ und $[AN]$ gilt: $\overline{MD} = 1,7$ cm und $\overline{AN} = 1,0$ cm.

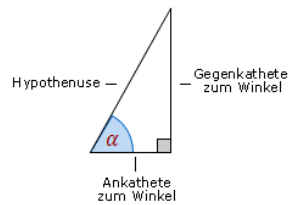
Lösung zu Aufgabe A3.1

Länge einer Strecke



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck DSM.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

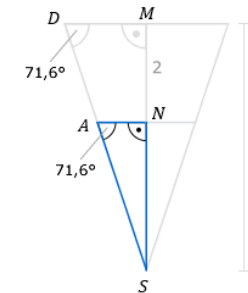
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan 71,6^\circ = \frac{\overline{MS}}{\overline{MD}}$$

$$\tan 71,6^\circ = \frac{5}{\overline{MD}} \quad | \cdot \overline{MD}$$

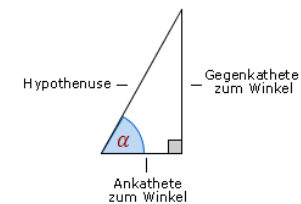
$$\overline{MD} \cdot \tan 71,6^\circ = 5 \quad | : \tan 71,6^\circ$$

$$\overline{MD} = \frac{5}{\tan 71,6^\circ} \approx 1,7 \text{ cm}$$



Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck ASN.

Erläuterung:



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan 71,6^\circ = \frac{\overline{NS}}{\overline{AN}}$$

$$\tan 71,6^\circ = \frac{5 - 2}{\overline{AN}} \quad | \cdot \overline{AN}$$

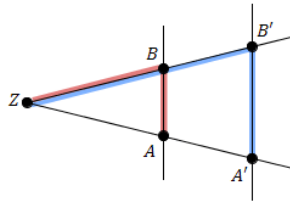
$$\overline{AN} \cdot \tan 71,6^\circ = 3 \quad | : \tan 71,6^\circ$$

$$\overline{AN} = \frac{3}{\tan 71,6^\circ} \approx 1,0 \text{ cm}$$

Alternative Lösung

Anwendung des Strahlensatzes im rechtwinkligen Dreieck DSM:

Erläuterung: *Strahlensatz, Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

$$1. \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

$$2. \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$$

$$\text{Angewendet im Dreieck DSM:} \quad \frac{\overline{SN}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{MD}}$$

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{SM}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{MD}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\overline{AN}}{1,7} \quad | \cdot 1,7$$

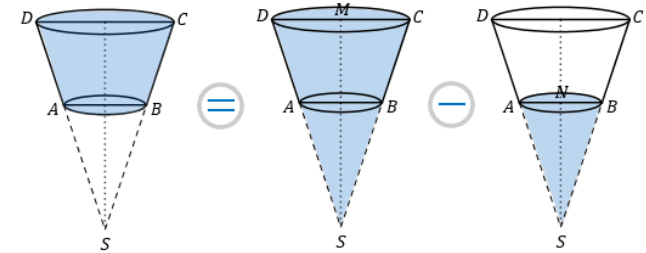
$$\overline{AN} = \frac{3 \cdot 1,7}{5} \approx 1,0 \text{ cm}$$

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Cremefüllung.

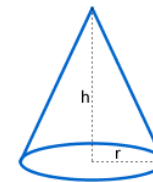
Lösung zu Aufgabe A3.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



$$V_{\text{Kegelstumpf}} = V_{\text{Kegel DSC}} - V_{\text{Kegel ASB}}$$

Erläuterung:



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{MD}^2 \cdot \pi \cdot \overline{MS} - \frac{1}{3} \cdot \overline{AN}^2 \cdot \pi \cdot \overline{SN}$$

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3} \cdot 1,7^2 \cdot \pi \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 3$$

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3}\pi \cdot (1,7^2 \cdot 5 - 1^2 \cdot 3)$$

$$V_{\text{Kegelstumpf}} \approx 12,0 \text{ cm}^3$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89%.

Also beträgt der Anteil der Creme am Volumen der Praline $100 - 89 = 11\%$.

$$V_{\text{Kugel}} = 11\% \cdot 12,0 \approx 1,3 \text{ cm}^3$$