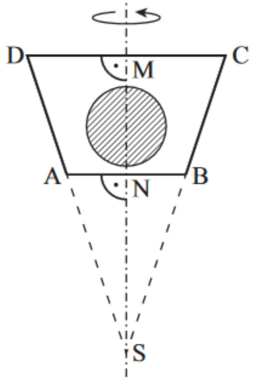
Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik II Aufgabe A3

Aufgabe A3.

Die untenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt ABCD eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse MS.
Dieser Körper dient als Muster zur Herstellung einer Praline.

Die Praline besteht aus Schokolade und einer kugelförmigen Cremefüllung. Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89%.

Es gilt: $\overline{\mathrm{MS}} = 5$ cm; $\overline{\mathrm{MN}} = 2$ cm; $\measuredangle \mathrm{ADM} = 71,6°$



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Strecken [MD] und [AN] gilt: $\overline{\mathrm{MD}} = 1,7$ cm und $\overline{\mathrm{AN}} = 1,0$ cm.

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Cremefüllung.

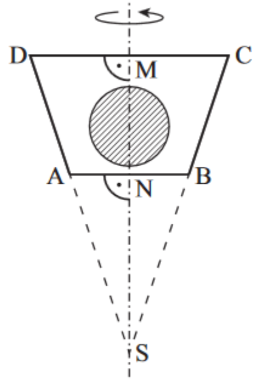
Lösung

Aufgabe A3.

Die untenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt ABCD eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse MS.
Dieser Körper dient als Muster zur Herstellung einer Praline.

Die Praline besteht aus Schokolade und einer kugelförmigen Cremefüllung. Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89%.

Es gilt: $\overline{\mathrm{MS}} = 5$ cm; $\overline{\mathrm{MN}} = 2$ cm; $\measuredangle \mathrm{ADM} = 71,6°$



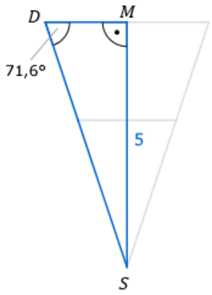
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A3.1 (2 Punkte)

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Strecken [MD] und [AN] gilt: $\overline{\mathrm{MD}} = 1,7$ cm und $\overline{\mathrm{AN}} = 1,0$ cm.

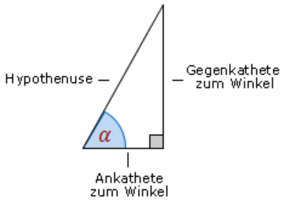
Lösung zu Aufgabe A3.1

Länge einer Strecke



Betrachtet wird das rechtwinklinge Dreieck DSM.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

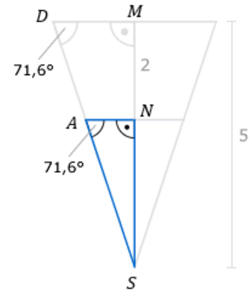
Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan 71,6^\circ = \frac{\overline{\mathrm{MS}}}{\overline{\mathrm{MD}}}$$

$$\tan 71,6^\circ = \frac{5}{\overline{\mathrm{MD}}} \qquad | \cdot \overline{\mathrm{MD}}$$

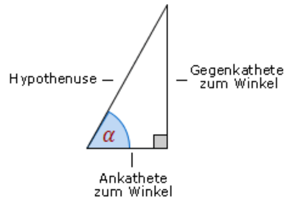
$$\overline{\mathrm{MD}} \cdot \tan 71,6^\circ = 5 \qquad | : \tan 71,6^\circ$$

$$\overline{\mathrm{MD}} = \frac{5}{\tan 71,6^\circ} \approx 1,7 \text{ cm}$$



Betrachtet wird das rechtwinklinge Dreieck ASN.

Erläuterung:



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan 71,6^\circ = \frac{\overline{\mathrm{NS}}}{\overline{\mathrm{AN}}}$$

$$\tan 71,6^\circ = \frac{5-2}{\overline{\mathrm{AN}}} \qquad | \cdot \overline{\mathrm{AN}}$$

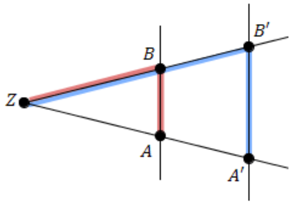
$\overline{\text{AN}} \cdot \tan 71,6^\circ = 3 \qquad | : \tan 71,6^\circ$

$$\overline{\text{AN}} = \frac{3}{\tan 71,6^\circ} \approx 1,0 \text{ cm}$$

Alternative Lösung

Anwendung des Strahlensatzes im rechtwinkligen Dreieck DSM:

Erläuterung: *Strahlensatz, Vierstreckensatz*



Wird ein Strahl von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gelten zwischen den Strecken folgende Beziehungen:

1. $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$ und $\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$
2. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}}$ bzw. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}$

Angewendet im Dreieck DSM: $\dfrac{\overline{\text{SN}}}{\overline{\text{SM}}} = \dfrac{\overline{\text{AN}}}{\overline{\text{MD}}}$

$$\frac{\overline{\text{SN}}}{\overline{\text{SM}}} = \frac{\overline{\text{AN}}}{\overline{\text{MD}}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{\overline{\text{AN}}}{1,7} \qquad | \cdot 1,7$$

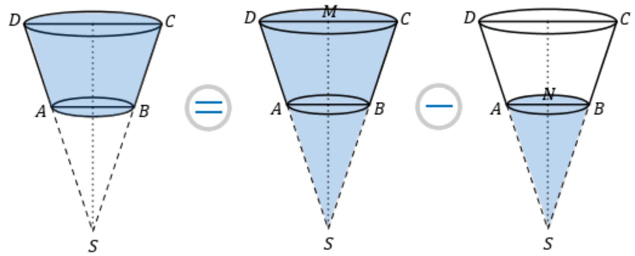
$$\overline{\text{AN}} = \frac{3 \cdot 1,7}{5} \approx 1,0 \text{ cm}$$

Aufgabe A3.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen V der Cremefüllung.

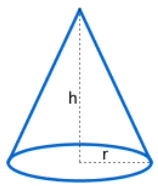
Lösung zu Aufgabe A3.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



$$V_{\text{Kegelstumpf}} = V_{\text{Kegel DSC}} - V_{\text{Kegel ASB}}$$

Erläuterung:



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h, hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3} \cdot \overline{\text{MD}}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\text{MS}} - \frac{1}{3} \cdot \overline{\text{AN}}^2 \cdot \pi \cdot \overline{\text{SN}}$$

$$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3} \cdot 1,7^2 \cdot \pi \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 3$$

$V_{\text{Kegelstumpf}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(1,7^2 \cdot 5 - 1^2 \cdot 3\right)$

$V_{\text{Kegelstumpf}} \approx 12,0 \text{ cm}^3$

Erläuterung: *Erläuterung*

Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89%.

Also beträgt der Anteil der Creme am Volumen der Praline $100 - 89 = 11\%$.

$V_{\text{Kugel}} = 11\% \cdot 12,0 \approx 1,3 \text{ cm}^3$