Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

Es werden zwei Versuche zur Abkühlung von heißem Wasser durchgeführt. Der Temperaturverlauf während dieser Versuche lässt sich jeweils näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = (y_A - y_U) \cdot 0,9^x + y_U$ $\left(\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, y_A \in \mathbb{R}^+, y_U \in \mathbb{R}^+\right)$ beschreiben.

Dabei ist nach x Minuten die Temperatur des Wassers auf y° C gesunken. Die Anfangstemperatur des Wassers beträgt $y_A{}^\circ$ C und die Umgebungstemperatur $y_U{}^\circ$ C.
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Im ersten Versuch kühlt $95^\circ C$ heißes Wasser in einem Raum mit einer Umgebungstemperatur von $20^\circ C$ ab.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Wassertemperatur auf $60^\circ C$ gesunken ist.

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Im zweiten Versuch kühlt $72^\circ C$ heißes Wasser in einem ersten Raum mit einer Umgebungstemperatur von $18^\circ C$ für 3 Minuten ab. Anschließend wird der Abkühlvorgang in einem zweiten Raum für weitere 8 Minuten fortgesetzt, bis das Wasser eine Temperatur von $39^\circ C$ besitzt.
Berechnen Sie die Umgebungstemperatur im zweiten Raum.

Lösung

Aufgabe A1.

Es werden zwei Versuche zur Abkühlung von heißem Wasser durchgeführt. Der Temperaturverlauf während dieser Versuche lässt sich jeweils näherungsweise durch eine Exponentialfunktion der Form $y = (y_A - y_U) \cdot 0,9^x + y_U$ $\left(\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, y_A \in \mathbb{R}^+, y_U \in \mathbb{R}^+\right)$ beschreiben.

Dabei ist nach x Minuten die Temperatur des Wassers auf y° C gesunken. Die Anfangstemperatur des Wassers beträgt $y_A{}^\circ$ C und die Umgebungstemperatur $y_U{}^\circ$ C.
Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Im ersten Versuch kühlt $95^\circ C$ heißes Wasser in einem Raum mit einer Umgebungstemperatur von $20^\circ C$ ab.
Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Wassertemperatur auf $60^\circ C$ gesunken ist.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Exponentielles Wachstum

Gesucht: x

Gegeben: $y_A = 95$, $y_U = 20$ und $y = 60$

> Erläuterung: *Einsetzen*
>
> $y_A = 95$, $y_U = 20$ und $y = 60$ werden in die gegebene Formel $y = (y_A - y_U) \cdot 0,9^x + y_U$ eingesetzt und anschließend nach x aufgelöst.

$60 = (95 - 20) \cdot 0,9^x + 20$

$60 = 75 \cdot 0,9^x + 20 \qquad | - 20$

$40 = 75 \cdot 0,9^x \qquad | : 75$

$\frac{40}{75} = 0{,}9^x \qquad |\log_{0,9}$

Erläuterung: *Logarithmieren*

Die Exponentialfunktion $0{,}9^x$ kann durch den Logarithmus $\log 0{,}9$ aufgehoben werden.

Beispiel: $2^x = 8 \iff \log_2 2^x = \log_2 8 \iff x = 3$

$x = \log_{0,9} \frac{40}{75}$

$x \approx 6{,}0$ min

Aufgabe A1.2 (3 Punkte)

Im zweiten Versuch kühlt $72°C$ heißes Wasser in einem ersten Raum mit einer Umgebungstemperatur von $18°C$ für 3 Minuten ab. Anschließend wird der Abkühlvorgang in einem zweiten Raum für weitere 8 Minuten fortgesetzt, bis das Wasser eine Temperatur von $39°C$ besitzt.
Berechnen Sie die Umgebungstemperatur im zweiten Raum.

Lösung zu Aufgabe A1.2

Exponentielles Wachstum

Gesucht: y

Gegeben: $y_A = 72$, $y_U = 18$, $x = 3$

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Angaben $y_A = 72$, $y_U = 18$, $x = 3$ werden in die gegebene Formel $y = (y_A - y_U) \cdot 0{,}9^x + y_U$ eingesetzt um y zu berechnen.

$y = (72 - 18) \cdot 0{,}9^3 + 18$

$y \approx 57{,}4°C$

Erläuterung: *Erläuterung*

$y \approx 57{,}4°C$ ist die Endtemperatur im ersten Raum und stellt zugleich die Anfangstemperatur im zweiten Raum dar.

Gegeben: $y = 39$, $y_A = 57{,}4$, $x = 8$

Gesucht: y_U

Erläuterung: *Einsetzen*

Die Angaben $y = 39$, $y_A = 57{,}4$, $x = 8$ werden wiederum in die gegebene Formel $y = (y_A - y_U) \cdot 0{,}9^x + y_U$ eingesetzt um y_U zu berechnen.

$39 = (57{,}4 - y_U) \cdot 0{,}9^8 + y_U$

$39 = 57{,}4 \cdot 0{,}9^8 - y_U \cdot 0{,}9^8 + y_U \quad | - 57{,}4 \cdot 0{,}9^8$

$39 - 57{,}4 \cdot 0{,}9^8 = -y_U \cdot 0{,}9^8 + y_U \quad |y_U \quad$ ausklammern

$39 - 57{,}4 \cdot 0{,}9^8 = y_U \cdot \left(-0{,}9^8 + 1\right) \quad | : \left(-0{,}9^8 + 1\right)$

$y_U = \frac{39 - 57{,}4}{-0{,}9^8 + 1}$

$y_U \approx 25{,}1°$