

Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

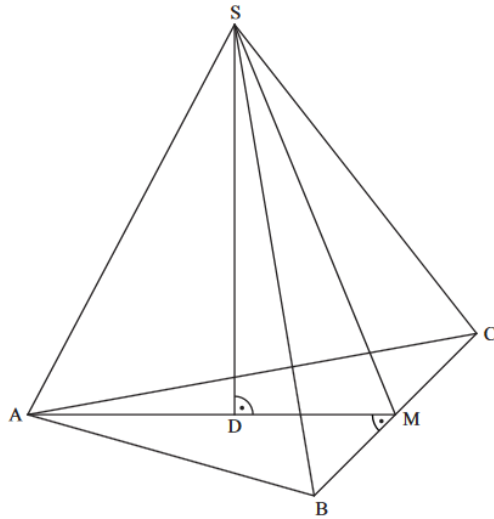
Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[BC]$ und der Höhe $[AM]$ ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$ mit der Spitze S . Der Punkt $D \in [AM]$ ist der Fußpunkt der Pyramidenhöhe $[DS]$, die senkrecht auf der Grundfläche steht.

Es gilt: $\overline{AM} = 8$ cm; $\overline{BC} = 10$ cm; $\overline{AD} = 4,5$ cm; $\overline{DS} = 8,5$ cm.

Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCS$.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$; $[AM]$ liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Maß des Winkels MAC .

[Ergebnis: $\angle MAC = 32,01^\circ$]

Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[DS]$. Die Winkel DAP_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 62; 10^\circ[$. Zeichnen Sie den Punkt P_1 und die Strecke $[AP_1]$ für $\varphi = 40^\circ$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Durch die Punkte P_n verlaufen zur Grundfläche ABC parallele Ebenen, die die Kanten der Pyramide $ABCS$ in Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$ und $G_n \in [CS]$ und die Strecke $[MS]$ in Punkten N_n schneiden. Die Dreiecke $E_n F_n G_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_n F_n G_n D$ mit der Spitze D .

Zeichnen Sie die Pyramide $E_1 F_1 G_1 D$ und den Punkt N_1 in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Längen der Strecken $[DP_n]$ und $[E_n N_n]$ in Abhängigkeit von φ .

[Ergebnisse: $\overline{DP_n}(\varphi) = 4,5 \cdot \tan \varphi$ cm; $\overline{E_n N_n}(\varphi) = (8 - 4,24 \cdot \tan \varphi)$ cm]

Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $E_1 F_1 G_1 D$.



Lösung

Aufgabe A2.

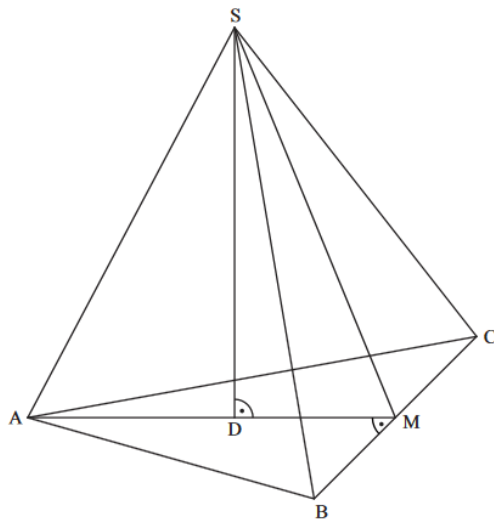
Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[BC]$ und der Höhe $[AM]$ ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$ mit der Spitze S . Der Punkt $D \in [AM]$ ist der Fußpunkt der Pyramidenhöhe $[DS]$, die senkrecht auf der Grundfläche steht.

Es gilt: $\overline{AM} = 8$ cm; $\overline{BC} = 10$ cm; $\overline{AD} = 4,5$ cm; $\overline{DS} = 8,5$ cm.

Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCS$.

In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45^\circ$; $[AM]$ liegt auf der Schrägbildachse.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



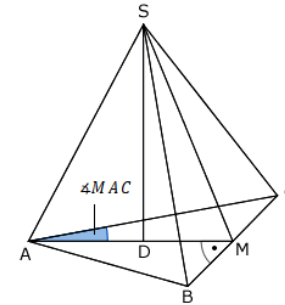
Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Maß des Winkels MAC .

[Ergebnis : $\angle MAC = 32,01^\circ$]

Lösung zu Aufgabe A2.1

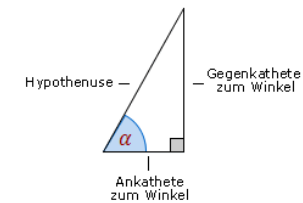
Winkel bestimmen



Gegeben: $\overline{BC} = 10$ cm $\Rightarrow \overline{MC} = 5$ cm, $\overline{AM} = 8$ cm

Gesucht: $\angle MAC$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \angle MAC = \frac{5}{8}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan \varphi = \frac{5}{8}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{5}{8} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$

$$\Rightarrow \angle MAC = 32,01^\circ$$

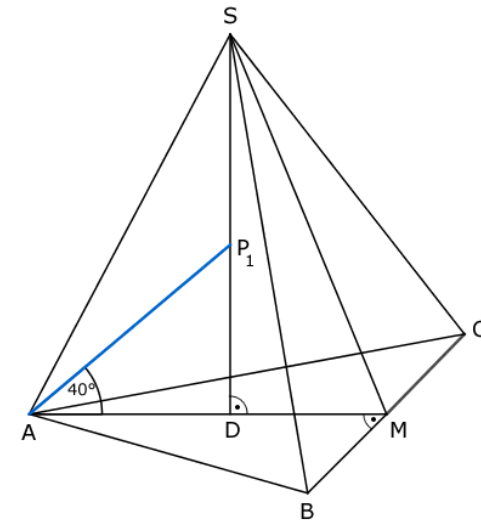
Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[DS]$. Die Winkel DAP_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0^\circ; 62,10^\circ[$.

Zeichnen Sie den Punkt P_1 und die Strecke $[AP_1]$ für $\varphi = 40^\circ$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- Antragen des Winkels $\varphi = 40^\circ$ am Punkt A.
- Punkt P_1 ergibt sich als Schnittpunkt des Winkelschenkels und der Strecke $[SD]$.
- Einzeichnen der Strecke $[AP_1]$.

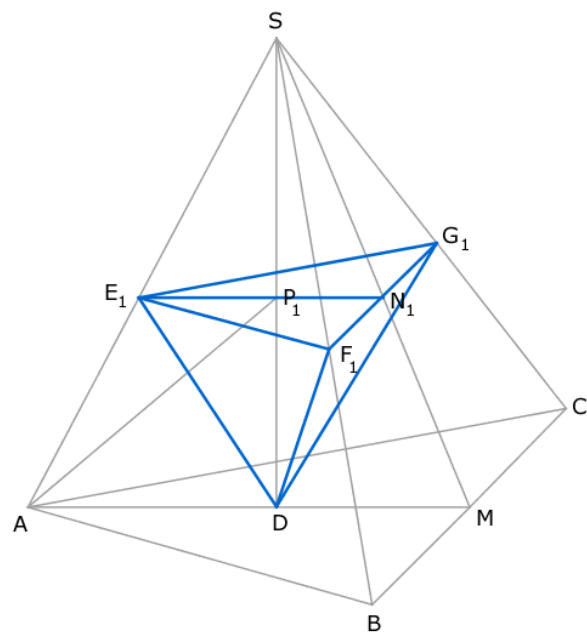
Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

Durch die Punkte P_n verlaufen zur Grundfläche ABC parallele Ebenen, die die Kanten der Pyramide $ABCS$ in Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$ und $G_n \in [CS]$ und die Strecke $[MS]$ in Punkten N_n schneiden. Die Dreiecke $E_n F_n G_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_n F_n G_n D$ mit der Spitze D.

Zeichnen Sie die Pyramide $E_1 F_1 G_1 D$ und den Punkt N_1 in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



Erläuterung: *Erläuterung*

- Einzeichnen der Strecke $[E_1 N_1]$, die durch den Punkt P_1 und parallel zur Strecke $[A M]$ verläuft. Der Punkt N_1 liegt auf der Strecke $[S M]$.
- Einzeichnen der Strecke $[F_1 G_1]$, die durch den Punkt N_1 und parallel zur Strecke $[B C]$ verläuft.
- Verbinden der Punkte E_1 , F_1 und G_1 zum Dreieck $E_1 F_1 G_1$.
- Verbinden der Eckpunkte des Dreiecks $E_1 F_1 G_1$ mit der Spitze D .

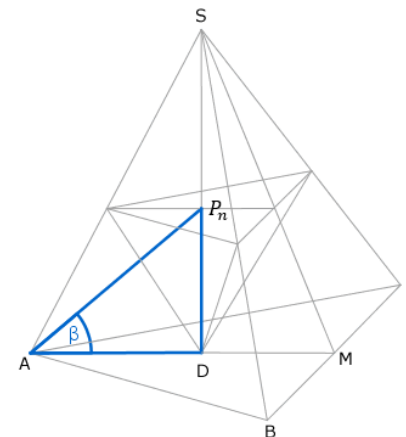
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Längen der Strecken $[D P_n]$ und $[E_n N_n]$ in Abhängigkeit von φ .

[Ergebnisse : $\overline{D P_n}(\varphi) = 4,5 \cdot \tan \varphi$ cm; $\overline{E_n N_n}(\varphi) = (8 - 4,24 \cdot \tan \varphi)$ cm]

Lösung zu Aufgabe A2.4

Länge einer Strecke

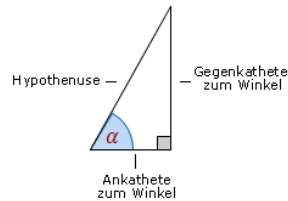


Gegeben: $\overline{A D} = 4,5$ cm und $\angle D A P_n = \varphi$

Gesucht: $\overline{D P_n}(\varphi)$

Man betrachte das Dreieck $A D P_n$.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



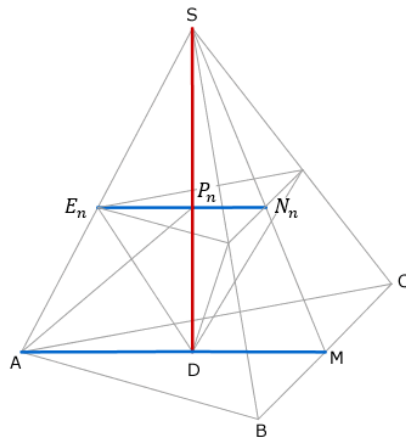
Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \varphi = \frac{\overline{DP_n}}{4,5} \quad | \cdot 4,5$$

$$\overline{DP_n} = 4,5 \cdot \tan \varphi \text{ cm}$$

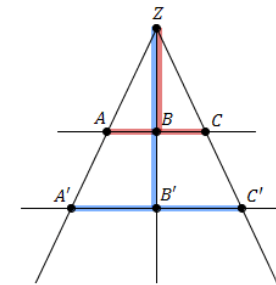


Gegeben: $\overline{AM} = 8 \text{ cm}$, $\overline{DS} = 8,5 \text{ cm}$ und $\overline{SP_n} = \overline{DS} - \overline{DP_n} = 8,5 - 4,5 \cdot \tan \varphi \text{ cm}$

Gesucht: $\overline{E_n N_n}(\varphi)$

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{B'Z}}$$

$$\frac{\overline{E_n N_n}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{P_n S}}{\overline{DS}}$$

$$\frac{\overline{E_n N_n}}{8} = \frac{8,5 - 4,5 \cdot \tan \varphi}{8,5} \quad | \cdot 8$$

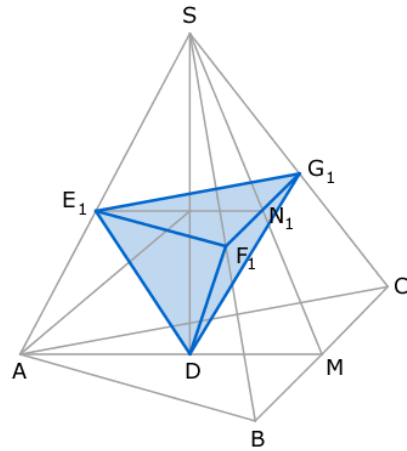
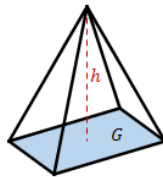
$$\overline{E_n N_n} = 8 \cdot \frac{8,5 - 4,5 \cdot \tan \varphi}{8,5}$$

$$\overline{E_n N_n} = 8 - 4,24 \cdot \tan \varphi \text{ cm}$$

Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $E_1 F_1 G_1 D$.

[Lösung zu Aufgabe A2.5](#)

Volumen einer PyramideErläuterung: *Volumen einer Pyramide*Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

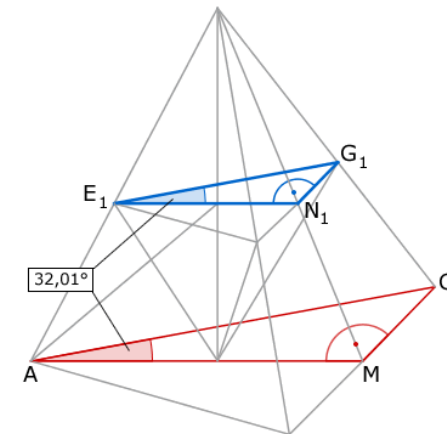
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{F_1 G_1} \cdot \overline{E_1 N_1} \cdot \overline{D P_1}$$

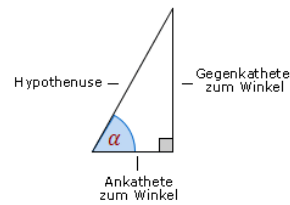
Es muss also noch die fehlende Streckenlänge $\overline{F_1 G_1}$ berechnet werden.
Hierzu betrachten wir das Dreieck $E_1 N_1 G_1$:

Erläuterung: *Erläuterung*

Das Dreieck $E_1 N_1 G_1$ ist rechtwinklig.
Der Winkel $\angle N E G$ entspricht dem Winkel $\angle M A C$ aus Teilaufgabe 1.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan 32,01^\circ = \frac{\overline{N_1 G_1}}{8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ} \quad | \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)$$

$$\overline{N_1 G_1} = \tan 32,01^\circ \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)$$

$$\Rightarrow \overline{F_1 G_1} = 2 \cdot \overline{N_1 G_1} = 2 \cdot \tan 32,01^\circ \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)$$

Nun kann das Volumen der Pyramide $E_1 F_1 G_1 D$ berechnet werden:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{F_1 G_1} \cdot \overline{E_1 N_1} \cdot \overline{D P_1}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot \tan 32,01^\circ \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)) \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ) \cdot (4,5 \cdot \tan 40^\circ)$$

$$V \approx 15,53 \text{ cm}^3$$