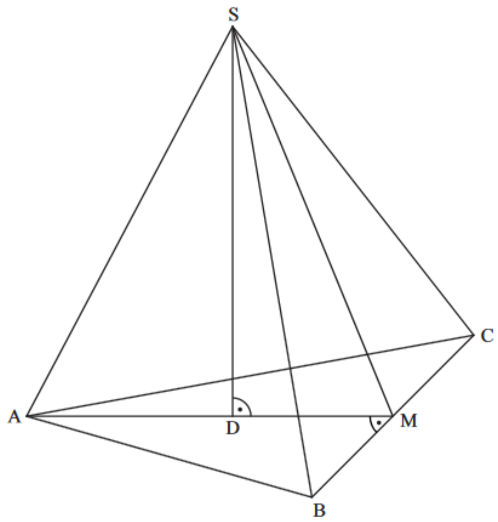
Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe A2

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Dreieck $A\,B\,C$ mit der Basis $[B\,C]$ und der Höhe $[A\,M]$ ist die Grundfläche der Pyramide $A\,B\,C\,S$ mit der Spitze S. Der Punkt $D \in [A\,M]$ ist der Fußpunkt der Pyramidenhöhe $[D\,S]$, die senkrecht auf der Grundfläche steht.
Es gilt: $\overline{A\,M} = 8$ cm; $\overline{B\,C} = 10$ cm; $\overline{A\,D} = 4,5$ cm; $\overline{D\,S} = 8,5$ cm.
Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide $A\,B\,C\,S$.
In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; $[A\,M]$ liegt auf der Schrägbildachse.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A2.1 (1 Punkt)

Berechnen Sie das Maß des Winkels $M\,A\,C$.
[Ergebnis : $\measuredangle M\,A\,C = 32,01°$]

Aufgabe A2.2 (1 Punkt)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[D\,S]$. Die Winkel $D\,A\,P_n$ haben das Maß φ mit $\varphi \in\,]0°; 62,10°[$.
Zeichnen Sie den Punkt P_1 und die Strecke $[A\,P_1]$ für $\varphi = 40°$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Aufgabe A2.3 (1 Punkt)

Durch die Punkte P_n verlaufen zur Grundfläche $A\,B\,C$ parallele Ebenen, die die Kanten der Pyramide $A\,B\,C\,S$ in Punkten $E_n \in [A\,S]$, $F_n \in [B\,S]$ und $G_n \in [C\,S]$ und die Strecke $[M\,S]$ in Punkten N_n schneiden. Die Dreiecke $E_n\,F_n\,G_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_n\,F_n\,G_n\,D$ mit der Spitze D.
Zeichnen Sie die Pyramide $E_1\,F_1\,G_1\,D$ und den Punkt N_1 in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Längen der Strecken $[D\,P_n]$ und $[E_n\,N_n]$ in Abhängigkeit von φ.
$\left[\text{ Ergebnisse : } \overline{D\,P_n}(\varphi) = 4,5 \cdot \tan\varphi \text{ cm}; \overline{E_n\,N_n}(\varphi) = (8 - 4,24 \cdot \tan\varphi) \text{ cm}\right]$

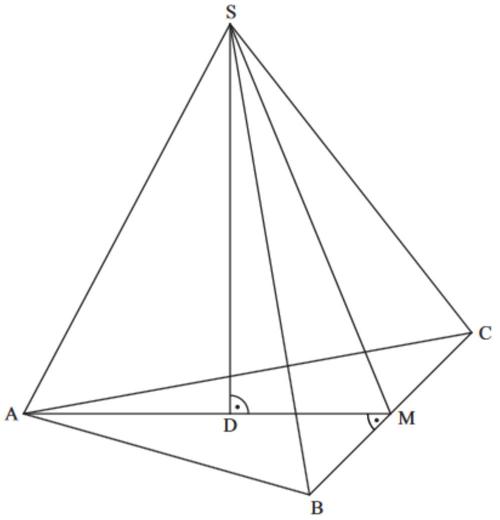
Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $E_1\,F_1\,G_1\,D$.

Lösung

Aufgabe A2.

Das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $[BC]$ und der Höhe $[AM]$ ist die Grundfläche der Pyramide $ABCS$ mit der Spitze S. Der Punkt $D \in [AM]$ ist der Fußpunkt der Pyramidenhöhe $[DS]$, die senkrecht auf der Grundfläche steht.
Es gilt: $\overline{AM} = 8$ cm; $\overline{BC} = 10$ cm; $\overline{AD} = 4{,}5$ cm; $\overline{DS} = 8{,}5$ cm.
Die untenstehende Zeichnung zeigt ein Schrägbild der Pyramide $ABCS$.
In der Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$; $[AM]$ liegt auf der Schrägbildachse.
Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

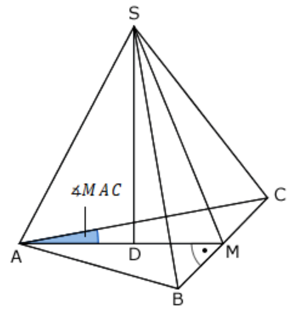


Aufgabe A2.1 (1 Punkte)

Berechnen Sie das Maß des Winkels MAC.
[Ergebnis : $\measuredangle MAC = 32{,}01°$]

Lösung zu Aufgabe A2.1

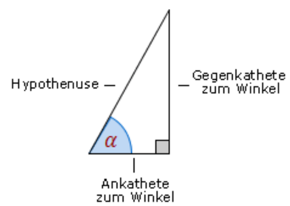
Winkel bestimmen



Gegeben: $\overline{BC} = 10$ cm $\Rightarrow \overline{MC} = 5$ cm, $\overline{AM} = 8$ cm

Gesucht: $\measuredangle MAC$

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$\tan\measuredangle MAC = \frac{5}{8}$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel φ aus $\tan\varphi = \frac{5}{8}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $\frac{5}{8} \rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ tan

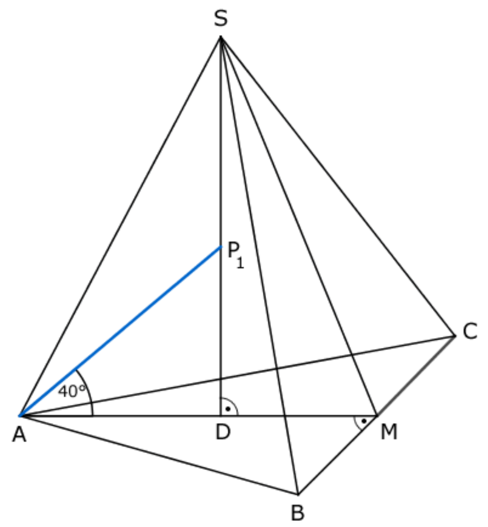
$\Rightarrow \measuredangle MAC = 32,01°$

Aufgabe A2.2 (1 Punkte)

Punkte P_n liegen auf der Strecke $[DS]$. Die Winkel DAP_n haben das Maß φ mit $\varphi \in]0°; 62,10°[$.
Zeichnen Sie den Punkt P_1 und die Strecke $[AP_1]$ für $\varphi = 40°$ in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.2

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

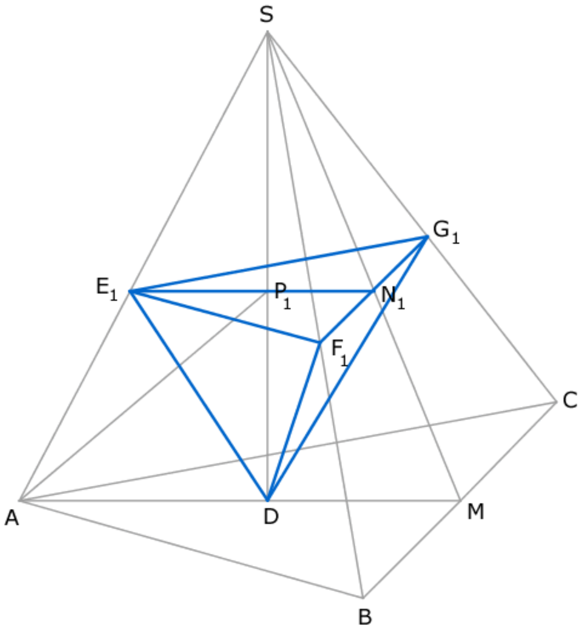
- Antragen des Winkels $\varphi = 40°$ am Punkt A.
- Punkt P_1 ergibt sich als Schnittpunkt des Winkelschenkels und der Strecke $[SD]$.
- Einzeichnen der Strecke $[AP_1]$.

Aufgabe A2.3 (1 Punkte)

Durch die Punkte P_n verlaufen zur Grundfläche ABC parallele Ebenen, die die Kanten der Pyramide $ABCS$ in Punkten $E_n \in [AS]$, $F_n \in [BS]$ und $G_n \in [CS]$ und die Strecke $[MS]$ in Punkten N_n schneiden. Die Dreiecke $E_n F_n G_n$ sind die Grundflächen von Pyramiden $E_n F_n G_n D$ mit der Spitze D.
Zeichnen Sie die Pyramide $E_1 F_1 G_1 D$ und den Punkt N_1 in das Schrägbild zu A 2.0 ein.

Lösung zu Aufgabe A2.3

Skizze



Erläuterung: *Erläuterung*

- Einzeichnen der Strecke $[E_1\,N_1]$, die durch den Punkt P_1 und parallel zur Strecke $[A\,M]$ verläuft. Der Punkt N_1liegt auf der Strecke $[S\,M]$.

- Einzeichnen der Strecke $[F_1\,G_1]$, die durch den Punkt N_1 und parallel zur Strecke $[B\,C]$ verläuft.

- Verbinden der Punkte E_1, F_1 und G_1 zum Dreieck $E_1\,F_1\,G_1$.

- Verbinden der Eckpunkte des Dreiecks $E_1\,F_1\,G_1$ mit der Spitze D.

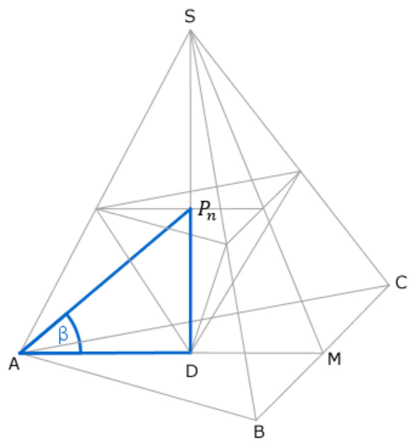
Aufgabe A2.4 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Längen der Strecken $[D\,P_n]$ und $[E_n\,N_n]$ in Abhängigkeit von φ.

$\left[\text{ Ergebnisse : } \overline{D\,P_n}(\varphi) = 4,5 \cdot \tan\varphi \text{ cm}; \overline{E_n\,N_n}(\varphi) = (8 - 4,24 \cdot \tan\varphi) \text{ cm}\right]$

Lösung zu Aufgabe A2.4

Länge einer Strecke

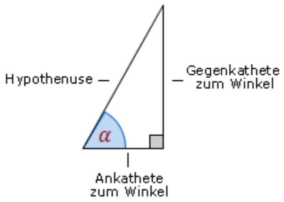


Gegeben: $\overline{A\,D} = 4,5$ cm und $\measuredangle D\,A\,P_n = \varphi$

Gesucht: $\overline{D\,P_n}(\varphi)$

Man betrachte das Dreieck $A\,D\,P_n$.

Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



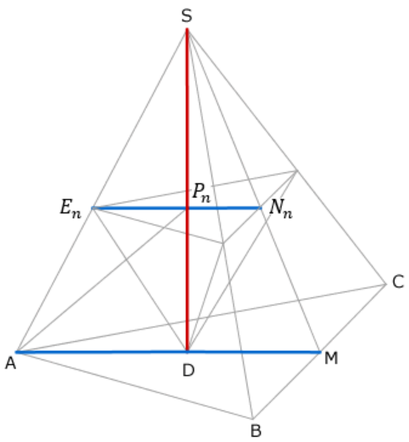
Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan\varphi = \frac{\overline{D\,P_n}}{4,5} \quad |\cdot 4,5$$

$$\overline{D\,P_n} = 4,5 \cdot \tan\varphi \text{ cm}$$

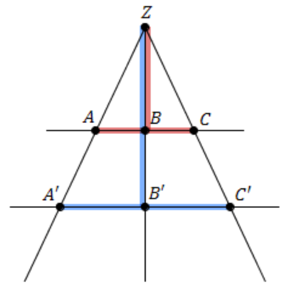


Gegeben: $\overline{A\,M} = 8$ cm, $\overline{D\,S} = 8,5$ cm und $\overline{S\,P_n} = \overline{D\,S} - \overline{D\,P_n} = 8,5 - 4,5 \cdot \tan\varphi$ cm

Gesucht: $\overline{E_n\,N_n}(\varphi)$

Erläuterung: *Vierstreckensatz*

Werden zwei Strahlen von zwei parallelen Geraden geschnitten, dann gilt zwischen den Strecken z.B. folgende Beziehung:



$$\frac{\overline{A\,C}}{\overline{A'\,C'}} = \frac{\overline{B\,Z}}{\overline{B'\,Z}}$$

$$\frac{\overline{E_n\,N_n}}{\overline{A\,M}} = \frac{\overline{P_n\,S}}{\overline{D\,S}}$$

$$\frac{\overline{E_n\,N_n}}{8} = \frac{8,5 - 4,5 \cdot \tan\varphi}{8,5} \quad |\cdot 8$$

$$\overline{E_n\,N_n} = 8 \cdot \frac{8,5 - 4,5 \cdot \tan\varphi}{8,5}$$

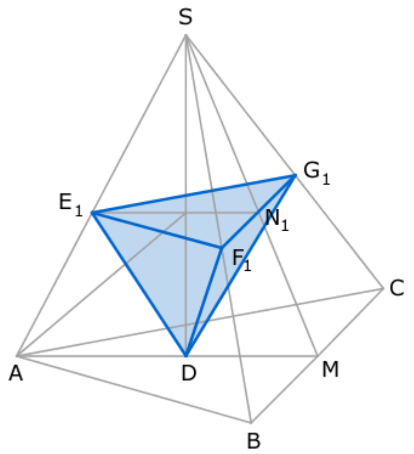
$$\overline{E_n\,N_n} = 8 - 4,24 \cdot \tan\varphi \text{ cm}$$

Aufgabe A2.5 (3 Punkte)

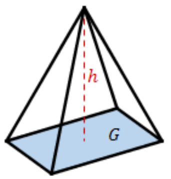
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $E_1\,F_1\,G_1\,D$.

Lösung zu Aufgabe A2.5

Volumen einer Pyramide



Erläuterung: *Volumen einer Pyramide*



Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

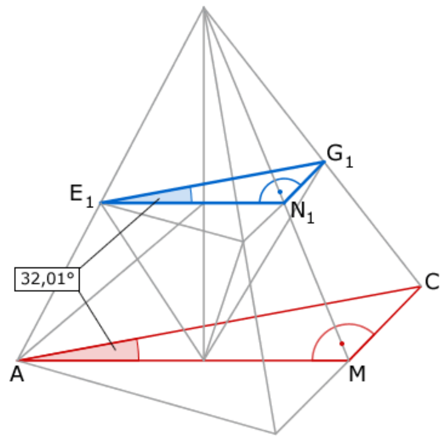
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{F_1\,G_1} \cdot \overline{E_1\,N_1} \cdot \overline{D\,P_1}$$

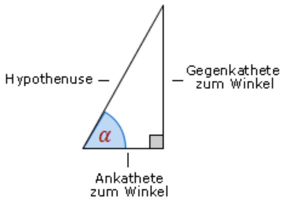
Es muss also noch die fehlende Streckenlänge $\overline{F_1\,G_1}$ berechnet werden.
Hierzu betrachten wir das Dreieck $E_1\,N_1\,G_1$:

Erläuterung: *Erläuterung*

Das Dreieck $E_1\,N_1\,G_1$ ist rechtwinklig.
Der Winkel $\measuredangle N\,E\,G$ entspricht dem Winkel $\measuredangle M\,A\,C$ aus Teilaufgabe 1.



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan 32,01^\circ = \frac{\overline{N_1\,G_1}}{8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ} \qquad | \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)$$

$$\overline{N_1\,G_1} = \tan 32,01^\circ \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)$$

$$\Rightarrow \overline{F_1\,G_1} = 2 \cdot \overline{N_1\,G_1} = 2 \cdot \tan 32,01^\circ \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)$$

Nun kann das Volumen der Pyramide $E_1\,F_1\,G_1\,D$ berechnet werden:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{F_1\,G_1} \cdot \overline{E_1\,N_1} \cdot \overline{D\,P_1}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot \tan 32,01^\circ \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ)) \cdot (8 - 4,24 \cdot \tan 40^\circ) \cdot (4,5 \cdot \tan 40^\circ)$$

$$V \approx 15,53 \text{ cm}^3$$