

Mittlere-Reife-Prüfung 2018 Mathematik I Aufgabe B2

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(-2|2)$ und $C(3|3)$ sind für $x < 8$ gemeinsame Eckpunkte von Vierecken AB_nCD_n .

Die Eckpunkte $B_n(x|0, 5x)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[AC]$.

Für die Diagonalen $[B_nD_n]$ gilt: $M \in [B_nD_n]$ und $\overrightarrow{B_nD_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_nM}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und das Viereck AB_1CD_1 für $x = 0,5$ sowie die Diagonalen $[AC]$ und $[B_1D_1]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 10$

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n .

[Ergebnis: $D_n(-2, 5x + 1, 75) - 1, 25x + 8, 75]$]

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n .

Aufgabe B2.4 (5 Punkte)

Unter den Vierecken AB_nCD_n gibt es das Drachenviereck AB_2CD_2 .

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die x -Koordinate des Punktes B_2 gilt: $x = 0,91$.

Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Drachenvierecks AB_2CD_2 .

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Der Punkt C' entsteht durch Achsenspiegelung des Punktes C an der Geraden g .

Für das Viereck AB_3CD_3 gilt: $B_3 \in [AC']$.

Berechnen Sie die Koordinaten von C' und zeichnen Sie sodann das Viereck AB_3CD_3 in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein.

Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass für die Flächeninhalte der Dreiecke AMD_n und MB_nC gilt:

$A_{AMD_n} : A_{MB_nC} = 2,5 : 1$.

Lösung

Aufgabe B2.

Die Punkte $A(-2|2)$ und $C(3|3)$ sind für $x < 8$ gemeinsame Eckpunkte von Vierecken AB_nCD_n .

Die Eckpunkte $B_n(x|0, 5x)$ liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 0,5x$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Diagonalen $[AC]$.

Für die Diagonalen $[B_nD_n]$ gilt: $M \in [B_nD_n]$ und $\overrightarrow{B_nD_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_nM}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

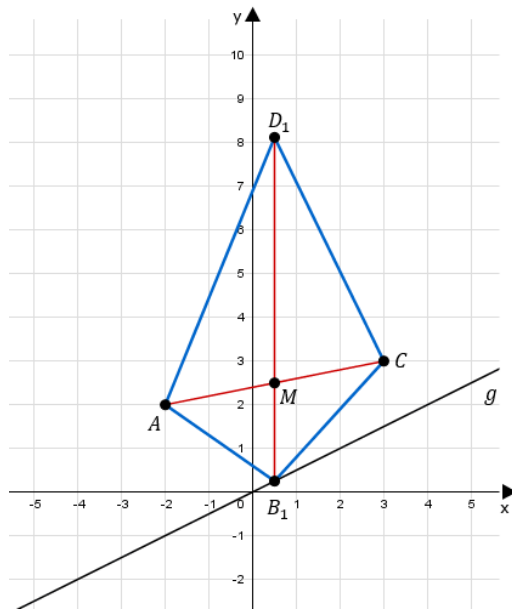
Aufgabe B2.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie die Gerade g und das Viereck AB_1CD_1 für $x = 0,5$ sowie die Diagonalen $[AC]$ und $[B_1D_1]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 10$

Lösung zu Aufgabe B2.1

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- Antragen der Punkte A und C sowie der Strecke $[AC]$.
- Einzeichnen des Mittelpunktes M der Strecke $[AC]$.
- Antragen der Ursprungsgeraden g mit Steigung $m_g = 0,5$.
- Einzeichnen des Punktes B_1 bei $x_1 = 0,5$ auf der Geraden g .
- Messen des Abstandes der Punkte B_1 und M . Anschließend wird der Abstand mit $3,5$ multipliziert und vom Punkt B_1 aus angetragen, um den Punkt D_1 zu erhalten.
- Einzeichnen des Vierecks $A B_1 C D_1$.

Aufgabe B2.2 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte B_n .

[Ergebnis: $D_n(-2,5x + 1,75 | -1,25x + 8,75)$]

Lösung zu Aufgabe B2.2

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $A(-2|2)$ $C(3|3)$

Gesucht: M

Erläuterung: *Mittelpunkt einer Strecke*

Der Mittelpunkt einer Strecke $[AB]$ mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ berechnet sich mit der Formel $M_{[AB]} \left(\frac{x_A + x_B}{2} \mid \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

$$M \left(\frac{-2 + 3}{2} \mid \frac{2 + 3}{2} \right)$$

$$M \left(\frac{1}{2} \mid \frac{5}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M(0,5 \mid 2,5)$$

Ermittlung des Vektors $\overrightarrow{B_1 M}$:

Erläuterung: *Spitze minus Fuß*

Die Berechnung eines Vektors \overrightarrow{AB} mit den Punkten $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$ erfolgt nach der Technik „Spitze minus Fuß“:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_1 M} = \begin{pmatrix} 0,5 - x \\ 2,5 - 0,5x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_n D_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_n M}$$

$$\overrightarrow{B_n D_n} = 3,5 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 - x \\ 2,5 - 0,5x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_n D_n} = \begin{pmatrix} 1,75 - 3,5x \\ 8,75 - 1,75x \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{D_n} = \overrightarrow{B_n} + \overrightarrow{B_n D_n}$$

Erläuterung: *Vektoraddition*

Um den Ortsvektor \vec{D}_n des Punktes D_n zu berechnen nimmt man den Ortsvektor \vec{B}_n des Punktes B_n und addiert ihn mit dem Richtungsvektor $\vec{B}_n D_n$.

$$\vec{D}_n = \begin{pmatrix} x \\ 0,5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,75 - 3,5x \\ 8,75 - 1,75x \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_n = \begin{pmatrix} 1,75 - 2,5x \\ 8,75 - 1,25x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_n(-2,5x + 1,75 | -1,25 + 8,75)$$

Aufgabe B2.3 (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Gleichung des Trägergraphen der Punkte D_n .

Lösung zu Aufgabe B2.3

Trägergraphen / Ortskurve bestimmen

$$x = -2,5x + 1,75 \quad | +2,5x$$

Erläuterung: *Trägergraphen*

Die x -Koordinate $x + \frac{4}{3}$ von D_n wird nach x aufgelöst.
Anschließend wird der Term in die y -Koordinate von S eingesetzt.

$$x + 2,5x = 1,75 \quad | -x$$

$$2,5x = 1,75 - x \quad | :2,5$$

$$x = \frac{1,75 - x}{2,5}$$

$$x \text{ eingesetzt in } y = -1,25x + 8,75$$

$$y = -1,25 \cdot \left(\frac{1,75 - x}{2,5} \right) + 8,75$$

$$y = -0,88 - 0,5x + 8,75$$

$$y = -0,5x + 7,88$$

$$\Rightarrow y = -0,5x + 7,88$$

Aufgabe B2.4 (5 Punkte)

Unter den Vierecken AB_nCD_n gibt es das Drachenviereck AB_2CD_2 .

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die x -Koordinate des Punktes B_2 gilt: $x = 0,91$.

Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Drachenvierecks AB_2CD_2 .

Lösung zu Aufgabe B2.4

Flächeninhalt eines Drachenvierecks

Gegeben: $A(-2|2)$, $B_n(x|0,5x)$, $C(3|3)$, $D_n(-2,5x + 1,75 | -1,25x + 8,75)$

Gesucht: \vec{AC} und $\vec{B_nD_n}$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B_nD_n} = \begin{pmatrix} (-2,5x + 1,75) - x \\ (-1,25x + 8,75) - 0,5x \end{pmatrix}$$

$$\vec{B_nD_n} = \begin{pmatrix} -3,5x + 1,75 \\ -1,75x + 8,75 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \circ \vec{B_nD_n} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Im Drachenviereck AB_nCD_n stehen die Diagonalen $[AC]$ und $[B_nD_n]$ senkrecht aufeinander.

Wenn zwei Vektoren aufeinander senkrecht stehen, dann ist das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich 0.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3,5x + 1,75 \\ -1,75x + 8,75 \end{pmatrix} = 0$$

Erläuterung: *Skalarprodukt*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wird wie folgt dargestellt:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$5 \cdot (-3,5x + 1,75) + (-1,75x + 8,75) = 0$$

$$-17,5x + 8,75 - 1,75x + 8,75 = 0$$

$$-19,25x + 17,5 = 0 \quad | -17,5$$

$$-19,25x = -17,5 \quad | : -19,25$$

$$x = 0,91$$

Länge eines Vektors

Gegeben: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für $x_2 = 0,91$ in

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} -3,5x + 1,75 \\ -1,75x + 8,75 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich: } \vec{BD} = \begin{pmatrix} -3,5 \cdot (0,91) + 1,75 \\ -1,75 \cdot (0,91) + 8,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,435 \\ 7,1575 \end{pmatrix}$$

Gesucht: $|\vec{AC}|$ und $|\vec{BD}|$ um den Flächeninhalt $A_{AB_2CD_2}$ zu berechnen.

Erläuterung: *Länge eines Vektors*

Die Länge eines Vektors \vec{v} mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird mit der folgenden Formel berechnet:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{BD}| = \sqrt{(-1,435)^2 + (7,1575)^2} = 7,3$$

Erläuterung: *Flächeninhalt eines Drachenvierecks*

Ein Drachenviereck mit den Diagonalen e und f hat einen Flächeninhalt von:

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

$$A_{AB_2CD_2} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}|$$

$$A_{AB_2CD_2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot 7,3$$

$$A_{AB_2CD_2} = 18,61 \text{ FE}$$

Aufgabe B2.5 (3 Punkte)

Der Punkt C' entsteht durch Achsenspiegelung des Punktes C an der Geraden g .

Für das Viereck AB_3CD_3 gilt: $B_3 \in [AC']$.

Berechnen Sie die Koordinaten von C' und zeichnen Sie sodann das Viereck AB_3CD_3 in das Koordinatensystem zu B 2.1 ein.

Lösung zu Aufgabe B2.5

Koordinaten von Punkten ermitteln

Gegeben: $g: y = 0,5x$ und $C(3|3)$

Gesucht: Koordinaten des Punktes C'

Erläuterung: *Steigung einer Geraden*

Für den Winkel α , den eine Gerade $g: y = mx + t$ mit der x -Achse einschließt, gilt:

$$m = \tan \alpha$$

$$\tan \alpha = 0,5$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Weil man später für die Spiegelungsmatrix den doppelten Winkel benötigt, berechnen wir hier gleich 2α .

Um den Winkel 2α aus $\tan \alpha = 0,5$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

TR: $0,5 \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan \rightarrow \cdot 2$

$$\Rightarrow 2\alpha = 53,13^\circ$$

Erläuterung: *Spiegelung*

Ist α der Winkel, den die Spiegelungsgerade mit der x-Achse einschließt, so lautet die entsprechende Spiegelungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 53,13^\circ & \sin 53,13^\circ \\ \sin 53,13^\circ & -\cos 53,13^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Matrizenmultiplikation*

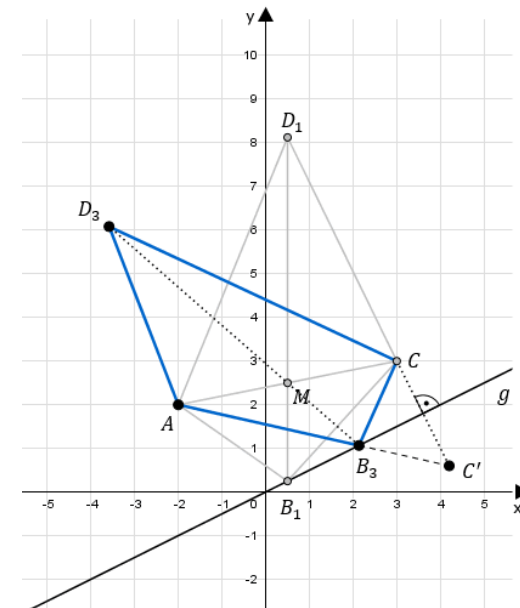
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos 53,13^\circ + 3 \cdot \sin 53,13^\circ \\ 3 \cdot \sin 53,13^\circ - 3 \cdot \cos 53,13^\circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,2 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C'(4,2|0,6)$$

Skizze



Erläuterung: *Einzeichnen*

- Antragen des Spiegelpunktes C' .
- Einzeichnen der Strecke $[AC']$.
- Der Schnittpunkt der Strecke $[AC']$ mit der Geraden g ergibt den Punkt B_3 .
- Messen des Abstandes der Punkte B_3 und M . Anschließend wird der Abstand mit $3,5$ multipliziert und vom Punkt B aus angetragen.

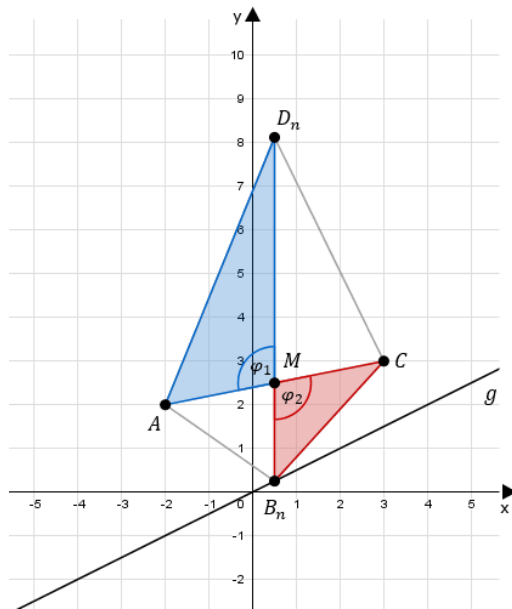
Aufgabe B2.6 (2 Punkte)

Begründen Sie, dass für die Flächeninhalte der Dreiecke $AM D_n$ und $M B_n C$ gilt:

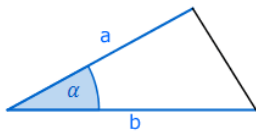
$$A_{AM D_n} : A_{M B_n C} = 2,5 : 1.$$

Lösung zu Aufgabe B2.6

2-dimensionale Geometrie



Erläuterung: *Flächeninhalt eines Dreiecks*



Sind in einem beliebigem Dreieck ABC zwei Seiten a und b und der Winkel α , der von beiden Seiten eingeschlossen wird, bekannt, so gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

Da $A_{AM D_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MD_n} \cdot \sin \varphi_1$ mit $\varphi_1 = \angle D_n M A$ und

$$A_{M B_n C} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MB_n} \cdot \sin \varphi_2 \quad \text{mit } \varphi_2 = \angle B_n M C \quad \text{gilt:}$$

$$\frac{A_{AM D_n}}{A_{M B_n C}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MD_n} \cdot \sin \varphi_1}{\frac{1}{2} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{MB_n} \cdot \sin \varphi_2}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\frac{1}{2}$ kann aus dem Nenner und dem Zähler des Verhältnisses gestrichen werden.

$$\frac{A_{AM D_n}}{A_{M B_n C}} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MD_n} \cdot \sin \varphi_1}{\overline{MC} \cdot \overline{MB_n} \cdot \sin \varphi_2}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

$\sin \varphi_1$ und $\sin \varphi_2$ können gekürzt werden, da φ_1 und φ_2 Scheitelwinkel sind und somit $\varphi_1 = \varphi_2$ gilt.

$$\frac{A_{AM D_n}}{A_{M B_n C}} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{MD_n}}{\overline{MC} \cdot \overline{MB_n}}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da der Punkt M der Mittelpunkt der Strecke $[AC]$ ist, gilt: $\overline{AM} = \overline{MC}$

Somit können die Streckenlängen \overline{AM} und \overline{MC} ebenfalls aus dem Verhältnis gekürzt werden.

$$\frac{A_{AM D_n}}{A_{M B_n C}} = \frac{\overline{MD_n}}{\overline{MB_n}}$$

Erläuterung: *Erläuterung*

Da für die Diagonalen $[B_n D_n]$ $\overrightarrow{B_n D_n} = 3,5 \cdot \overrightarrow{B_n M}$ gilt, ist $\overline{MD_n} = 2,5 \cdot \overline{MB_n}$.

$$\frac{A_{AM D_n}}{A_{M B_n C}} = \frac{2,5}{1}$$