

Mittlere-Reife-Prüfung 2019 Mathematik I Aufgabe A1

Aufgabe A1.

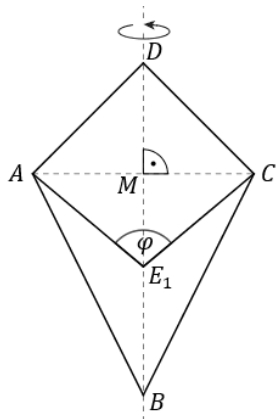
Gegeben ist das Drachenviereck ABCD mit der Symmetrieachse BD und dem Diagonalschnittpunkt M .

Es gilt: $\overline{AM} = \overline{DM} = 2$ cm und $\overline{BD} = 6$ cm.

Punkte E_n auf der Strecke $[BM]$ legen zusammen mit den Punkten A , C und D die Drachenvierecke AE_nCD fest. Die Winkel $\angle CE_nA$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [53, 13^\circ; 180^\circ[$.

Die Zeichnung zeigt das Drachenviereck ABCD und das Drachenviereck AE_1CD für $\varphi = 100^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Drachenviereck AE_2CD für $\varphi = 70^\circ$ in die Zeichnung zu A 1. ein. Bestätigen Sie sodann die untere Intervallgrenze für φ durch Rechnung.

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

Die Drachenvierecke AE_nCD rotieren um die Gerade BD.

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von

$$\varphi \text{ gilt: } V(\varphi) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan(0,5 \cdot \varphi)} \right) \text{ cm}^3.$$

Aufgabe A1.3 (1 Punkt)

Das Drachenviereck AE_3CD ist ein Quadrat.

Bestimmen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers.

Lösung

Aufgabe A1.

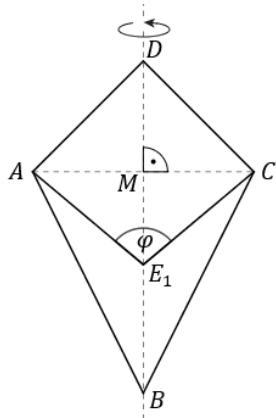
Gegeben ist das Drachenviereck $ABCD$ mit der Symmetrieachse BD und dem Diagonalschnittpunkt M .

Es gilt: $\overline{AM} = \overline{DM} = 2$ cm und $\overline{BD} = 6$ cm.

Punkte E_n auf der Strecke $[BM]$ legen zusammen mit den Punkten A , C und D die Drachenvierecke AE_nCD fest. Die Winkel $\angle CE_nA$ haben das Maß φ mit $\varphi \in [53, 13^\circ; 180^\circ]$.

Die Zeichnung zeigt das Drachenviereck $ABCD$ und das Drachenviereck AE_1CD für $\varphi = 100^\circ$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

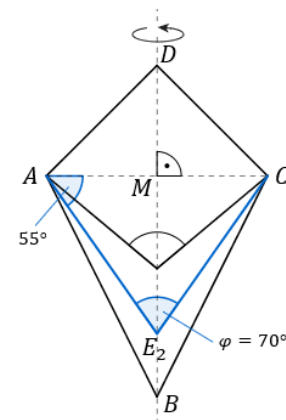


Aufgabe A1.1 (2 Punkte)

Zeichnen Sie das Drachenviereck AE_2CD für $\varphi = 70^\circ$ in die Zeichnung zu A 1. ein.
Bestätigen Sie sodann die untere Intervallgrenze für φ durch Rechnung.

Lösung zu Aufgabe A1.1

Skizze



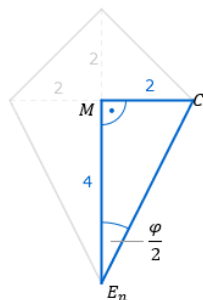
Erläuterung: *Winkelsumme im Dreieck*

Wenn $\varphi = 70^\circ$, dann sind die Winkel bei A und C im gleichschenkligen Dreieck AE_2C wegen der Winkelsumme im Dreieck jeweils $\frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$ groß.

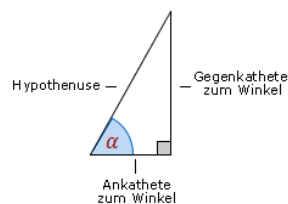
Winkel bestimmen

φ wird am kleinsten, wenn $E_n = B$.

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck E_nMC :



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{6-2}{2}$$

Erläuterung: *Winkel berechnen*

Um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ aus $\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{2}$ zu bestimmen, wird im Taschenrechner (TR) folgendes eingegeben:

$$\text{TR: } \frac{4}{2} \rightarrow \text{SHIFT} \rightarrow \tan$$

$$\frac{\varphi}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{4}{2} \right) \quad | \cdot 2$$

$$\varphi = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{4}{2} \right) = 53,13^\circ$$

Aufgabe A1.2 (2 Punkte)

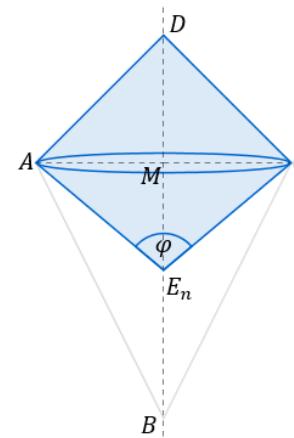
Die Drachenvierecke AE_nCD rotieren um die Gerade BD .

Zeigen Sie, dass für das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit

$$\text{von } \varphi \text{ gilt: } V(\varphi) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan(0,5 \cdot \varphi)} \right) \text{ cm}^3.$$

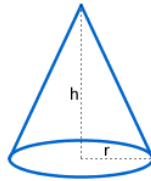
Lösung zu Aufgabe A1.2

Volumen des Rotationskörpers ermitteln



$$V_{\text{Gesamt}} = V_{\text{oberer Kegel}} + V_{\text{unterer Kegel}}$$

Erläuterung: *Volumen eines Kegels*



Ein Kegel mit Radius r und Höhe h , hat ein Volumen von:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot \overline{DM} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot \overline{ME_n}$$

Erläuterung: *Ausklammern*

Der Term $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{AM}^2$ wird aus beiden Summanden ausgeklammert.

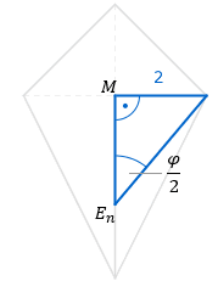
$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \overline{AM}^2 \cdot (\overline{DM} + \overline{ME_n})$$

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot (2 + \overline{ME_n})$$

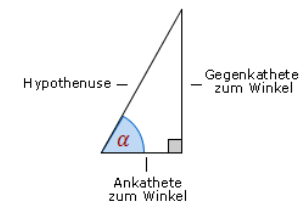
Seite eines Dreiecks bestimmen

Nebenrechnung: $\overline{ME_n}$ bestimmen

Betrachtet wird das rechtwinklige Dreieck E_nMC :



Erläuterung: *Tangens eines Winkels*



Der Tangens eines Winkels α ist ein Seitenverhältnis.

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha}$$

Gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken.

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{2}{\overline{ME_n}} \Rightarrow \overline{ME_n} = \frac{2}{\tan \frac{\varphi}{2}}$$

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

Einsetzen von $\overline{ME_n} = \frac{2}{\tan \frac{\varphi}{2}}$ ergibt:

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot \left(2 + \frac{2}{\tan \frac{\varphi}{2}} \right)$$

Erläuterung: *Ausklammern*

2 wird aus dem Termn $2 + \frac{2}{\tan \frac{\varphi}{2}}$ ausgeklammert.

$$V_{\text{Gesamt}} = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}}\right)$$

Aufgabe A1.3 (1 Punkte)

Das Drachenviereck AE_3CD ist ein Quadrat.

Bestimmen Sie das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers.

Lösung zu Aufgabe A1.3

Volumen des Rotationskörpers ermitteln

Das Drachenviereck ist ein Quadrat, wenn $\varphi = 90^\circ$.

$$V(90^\circ) = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan \frac{90^\circ}{2}}\right) = 16,76 \text{ cm}^3$$